



Origine et manifestation de la brisure de supersymétrie : Phénoménologie de l'annihilation de neutralinos en Zh et WW. Représentation $(0,1/2)$ et dualité.

B. Labonne

► To cite this version:

B. Labonne. Origine et manifestation de la brisure de supersymétrie : Phénoménologie de l'annihilation de neutralinos en Zh et WW. Représentation $(0,1/2)$ et dualité.. Physique des Hautes Energies - Expérience [hep-ex]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2007. Français. NNT : . tel-00194510

HAL Id: tel-00194510

<https://theses.hal.science/tel-00194510>

Submitted on 6 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE - AIX-MARSEILLE II
(U.F.R. des Sciences de Luminy)

THESE

présentée en vue d'obtenir le grade de

Docteur de l'Université de la Méditerranée
Spécialité : Physique Théorique, Physique Mathématique

par

Benjamin Labonne

**Origine et Manifestation de la Brisure de
Supersymétrie :**

- **Phénoménologie de l'annihilation de
neutralinos en Zh et WW**
- **Représentation $(0,1/2)$ et Dualité**

soutenue le 24 janvier 2007

devant le jury composé de

M.	Alain Baldit	Président
M.	Ulrich Ellwanger	Rapporteur
M.	Georges Girardi	
M.	Richard Grimm	Directeur de thèse
M.	Jean Orloff	Directeur de thèse
M.	Jean-Loïc Kneur	Rapporteur

Le travail intellectuel n'est que prostitution de l'esprit.

Fabien Courtine

Remerciements

Avant de vous présenter mon travail de thèse, je me dois de saisir l'occasion qui m'est présentée de saluer et remercier encore une fois les personnes sans qui ce travail n'aurait pas été possible. En premier lieu, je dois exprimer ma reconnaissance à Messieurs Marc Knecht et Alain Baldit, directeurs respectivement du Centre de Physique Théorique de Marseille et du Laboratoire de Physique Corpusculaire de Clermont-Ferrand, pour m'avoir permis de réaliser ce travail de recherche entre ces deux laboratoires.

Je dois louer Messieurs Jean Orloff et Richard Grimm, mes directeurs de thèses pour la patience dont ils ont fait preuve à mon égard. Ensuite, je remercie M Mathiot de m'avoir chaleureusement accueilli au sein de l'équipe théorie du LPC, mais aussi les autres membres de cette équipe : Vincent Morenas qui m'a toujours écouté quand je lui exposait mes problèmes, Jean-Jacques Dugne pour nos discussions informelles mais très enrichissantes sur la physique "non standard".

Je suis reconnaissant envers les membres du jury : Alain Baldit pour avoir accepté la présidence, Ulrich Ellwanger et Jean-Loïc Kneur pour avoir assumé le rôle de rapporteur ainsi que Georges Girardi qui me fait l'honneur de sa participation.

Je remercie tout particulièrement Emmanuel Nezri et sa connaissance des code DarkSusy, Pythia et Suspect, ainsi que pour sa compréhension phénoménologique de la supersymétrie qui m'a souvent éclairé. Je remercie aussi Gilbert Moultağa du LPTA pour son aide et son accueil.

J'adresse un grand merci à mes compagnons de labeur du LPC et à mes ex-collègues de DEA de Marseille. En particulier, je salue la tarot team du LPC avec en chef de file Monsieur FC philosophe et buveur de cognac fraise, son alcoolyste Arnaud R. dit le serial Killer des Vosges, Vincent L. alias le Jordan du LPC, FG (le tardigrade du RU), VG (aucun commentaire... la mafia est partout), mais aussi Docteur Poupouye, et pour finir les "p'tits nouveaux" Eric C et Fabrice T.

Je me dois aussi de remercier toutes les personnes du LPC que j'ai croisées sur mon passage durant ses quatre années mais aussi au cours de mes stages précédents, et qui ont contribué d'une manière ou d'une autre au bon déroulement de ma thèse.

Je finirais en remerciant les gens qui me tiennent particulièrement à coeur, Gérard mon père qui m'a toujours soutenu quoiqu'il arrive, Lolly ma mère de coeur, Valentin mon petit frère et Alexandra, mon amour....

À mon père

Table des matières

I	Introduction à la Supersymétrie	1
1	Introduction	3
1.1	Le Modèle Standard	3
1.2	Supersymétrie	4
1.3	Algèbre de supersymétrie	6
1.4	Multiplets de supersymétrie	7
2	super-espace et superchamps	9
2.1	Superchamp et représentation de l'algèbre	9
2.2	Superchamp chirale	11
2.3	Lagrangien supersymétrique renormalisable	13
2.4	Superchamp vectoriel	14
2.5	Théorie de jauge supersymétrique	16
3	Géométrie différentielle dans le super-espace	19
3.1	Définition du super-espace	19
3.2	Opérations de dérivation	21
3.3	Dérivée de Lie	22
3.4	Transformation de supersymétrie	23
4	Application aux superchamps chiraux	25
4.1	Définition des composantes et lagrangien cinétique	25
4.2	Lagrangiens invariants	27
4.3	Lagrangien potentiel et champs auxiliaires	28
5	Structure de jauge et formalisme géométrique	29
5.1	Structure de jauge	29
5.2	Superchamps covariant chiraux	30
5.3	Solution des contraintes	33
5.4	Composantes et transformations de supersymétrie	35
5.5	Lagrangien invariant de jauge	37
6	Brisure de supersymétrie et MSSM	39
6.1	Brisure par D-terme	39
6.2	Condition de brisure d'O'Raifeartaigh	40
6.3	Potentiel d'O'Raifeartaigh	42
6.4	Brisure douce	43
6.5	Modèle Standard Supersymétrique Minimal	43

II	Annihilation de neutralinos : suppression du canal Zh et forme du spectre en WW	47
7	Introduction au problème	49
7.1	Matrice de masse des neutralinos	49
7.2	Importance du canal Zh pour la détection de MN	51
7.3	Comparaison naïve entre $(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z$ et $(\chi\chi \rightarrow t\bar{t})_Z$	55
7.4	Processus dominant ou dominé ?	56
7.5	Généralité de la suppression dans le modèle mSugra	57
7.6	Comparaison du phénomène dans mSugra et dans le MSSM	57
8	Amplitude polarisée et approximation $M_{SUSY} \gg M_{MS}$	61
8.1	$\chi\chi \rightarrow Zh$ via boson Z en voie s	61
8.2	Canal t	64
8.3	Développement en série de Taylor des amplitudes	65
8.4	Théorie des perturbations	66
8.5	Polarisation longitudinale et unitarité à haute énergie	69
8.6	Théorème d'équivalence	70
9	Invariance de jauge et unitarité	73
9.1	Indépendance de jauge	73
9.2	Diagonalisation de la matrice de masse	76
9.3	Matrice de masse et invariance de jauge	78
9.4	Borne d'unitarité	79
9.5	Extraction du reste	81
9.6	Étude du terme restant après annulation	82
10	Effets de la polarisation des W	85
10.1	Polarisation des W	85
10.2	Effets de la polarisation des W sur le spectre	88
10.3	Conclusion	90
III	Dualité	95
11	Multiplets de supersymétrie $N = 1$	97
11.1	Représentations unitaires et champs locaux	97
11.2	Multiplet chirale (rappel)	99
11.3	Multiplet linéaire	100
11.4	Multiplet de 3-forme	101
11.5	Multiplet de 3-forme et représentation produit	102
11.6	Multiplet X	103
12	Dualité sans supersymétrie	107
12.1	Dualité pseudoscalaire/2-forme	107
12.2	Dualité champ de jauge/champ de jauge	109
12.3	Dualité constante/3-forme	110

13	Version supersymétrique	113
13.1	Dualité chirale/linéaire	113
13.2	Dualité multiplet de jauge / multiplet de jauge	115
13.3	Dualité multiplet de jauge / multiplet de jauge en composantes	117
13.4	Dualité multiplet X / multiplet de 3-forme	118
13.5	Dualité X/Y : formulation en composantes I	119
13.6	Dualité X/Y : Formulation en composantes II	122
13.7	Dualité de type I, avec Y comme représentation produit	125
14	Interactions renormalisables	127
14.1	Couplages de jauge pour des superchamp chiraux (rappel)	127
14.2	Couplages de jauge pour le superchamp X	128
14.3	Superpotentiel contenant une 3-forme	130
14.4	Conclusion	132
A	Conventions et définitions de base	135
A.1	Quantités basiques dans $SO(3,1)$ et $SL(2,\mathbb{C})$	135
A.2	Relations impliquant plus de deux matrices σ	138
A.3	Notation spinorielle pour les vecteurs	139
A.4	Spineurs	139
A.5	Relations utiles	140
B	bases du MSSM	141
B.1	Couplage $Z - \chi - \chi$	141
B.2	Couplage $h-Z-Z$	142
B.3	Couplage $h - \chi - \chi$	142
B.4	Couplage $Z - f - f$	143
B.5	Particule de Majorana	143
B.6	Un exemple de calcul avec des particules de Majorana	144
	Bibliographie	147

Première partie

Introduction à la Supersymétrie

Dans cette première partie, nous allons exposer les notions de base de la supersymétrie. D'une part, Nous exposerons l'approche traditionnelle de la supersymétrie, dans le formalisme des superchamps. D'autre part, nous présenterons l'approche géométrique et ses bénéfices, quant à la construction de théories supersymétriques. Nous construirons explicitement des lagrangiens invariants sous supersymétrie pour des superchamps chiraux dans un premier temps, avant d'exhiber une théorie de jauge supersymétrique et ses subtilités. Ensuite, nous montrerons différentes manières de briser cette théorie, afin d'exhiber brièvement les traits caractéristiques de la construction du Modèle Standard Supersymétrique Minimal (MSSM). Mais tout d'abord, remontons le temps, afin de replacer cette théorie dans son contexte historique.

Chapitre 1

Introduction

Dans ce premier chapitre, nous allons faire un bref rappel historique sur le Modèle Standard (MS) et la supersymétrie. Il nous incombe, dans un premier temps de présenter en détail l'algèbre de supersymétrie, puis brièvement nous montrerons deux de ses représentations nécessaires à la construction du MSSM.

Sommaire

1.1	Le Modèle Standard	3
1.2	Supersymétrie	4
1.3	Algèbre de supersymétrie	6
1.4	Multiplets de supersymétrie	7

1.1 Le Modèle Standard

Le XX^{ème} siècle fut riche en découvertes fondamentales. En effet, les travaux d'Einstein (1879-1955) sur la relativité restreinte puis sur la relativité générale, changèrent notre perception de l'espace et du temps, en unifiant ces deux concepts dans un même objet géométrique : l'espace-temps que l'interaction gravitationnelle est capable de courber. Parallèlement, l'école de Copenhague, dans les années 1920-1930, définissait une interprétation satisfaisante de la mécanique quantique grâce au concept de complémentarité onde-corpuscule ; avec comme chefs de file, principalement Niels Bohr (1885-1962) et Werner Heisenberg (1901-1976). Il fallut attendre encore quelques années pour qu'un physicien : P. A. M. Dirac (1902-1984) parvienne à réconcilier partiellement ces deux théories. La notion de particules ponctuelles fut définitivement remplacée par celle de champ, objet étendu à tout l'espace-temps. Les caractères quantiques et relativistes purent alors coexister dans un même formalisme : ce fut la naissance de la théorie quantique des champs.

Du côté expérimental, la découverte des forces faible et forte, ainsi que de tout un spectre de particules inconnues tant dans les rayons cosmiques que dans les accélérateurs, laissèrent les physiciens de l'époque quelque peu perplexes. C'est avec les travaux précurseurs de Pierre Curie (1859-1906) puis d'Emy Noether (1882-1935) sur la notion de symétrie, que la compréhension actuelle des principes de la physique se mit en place. Ainsi, la notion de symétrie (invariance par rapport à un groupe de transformations) permit une simplification de l'étude des problèmes de physique en utilisant de manière systématique le théorème de Noether : liant symétrie, quantité conservée et quantité relative. D'autre part, les vertus simplificatrices de la notion de symétrie, permirent à Gell-Mann (1929-)

de mettre un peu d'ordre dans cet éventail de particules grâce à l'hypothèse des quarks, qui se révéla être en accord avec le modèle des partons de Feynman (1918-1988). C'était la naissance du modèle standard, dont l'avènement est l'hypothèse de la brisure de la symétrie électrofaible par Glashow-Salam-Weinberg (Prix Nobel 1979). Même si le secteur de la chromodynamique quantique résiste encore à une compréhension complète, les principaux phénomènes de la physique des particules sont connus. Le modèle standard se permet même une intrusion dans la cosmologie, afin de donner des explications sur ce qui s'est passé quelques instants après le Big Bang. De la à croire, comme certains le pensaient déjà à la fin du XIX^{ème}, que toute la physique est connue, que seuls restent des points de détails, il n'y qu'un pas.

Cependant, de nombreux problèmes restent encore en suspens, autant au niveau théorique que phénoménologique. Un des premiers problèmes, et non des moindres, est la notion d'énergie du vide qui rend modèle standard et relativité générale incompatibles. Alors qu'en théorie quantique des champs, les corrections à l'énergie du vide sont liées à la masse des particules ($\simeq 178 \text{ GeV}$ pour le quark top) ; les indications astronomiques sur la constante cosmologique nous donnent une énergie du vide de l'ordre de quelques eV seulement. D'autres difficultés proviennent de questions plus subtiles, telles que la hiérarchie de l'échelle électrofaible et la naturalité de la masse du boson de Higgs, vis à vis de l'échelle de Planck. Tous ces problèmes sont intimement liés à la notion de renormalisation d'une théorie des champs contenant une particule scalaire responsable d'une brisure de symétrie (et donc non "protégée" par cette dernière).

Nous avons énoncé l'importance de la notion de symétrie dans la physique moderne, qui permit à Gell-Mann de simplifier la compréhension que nous avons des particules élémentaires. Ainsi est venu l'idée d'ajouter un nouveau type de symétrie, entre bosons (particules de spin entier) et fermions (particules de spin demi-entier) : la supersymétrie ; et ce, afin de régler les derniers problèmes du Modèle Standard. Cette symétrie fut mise en évidence tout d'abord par des mathématiciens : Golfand et Likhtmann en 1971 [56], pour des raisons purement esthétiques : élargir le groupe de symétrie d'espace-temps (groupe des rotations et translations dans un espace-temps, appelé groupe de Poincaré). Une première réalisation non linéaire fut étudiée par Volkov et Akulov [92] deux ans après. Cependant, l'utilité de cette symétrie a été démontré de manière indépendante dans les problèmes de divergences quadratiques d'une théorie quantique des champs par Wess et Zumino en 1973 [95–97].

La construction de lagrangiens supersymétriques a été ensuite généralisée par Salam et Strathdee [83, 84], Ferrara et al. [41, 42], grâce aux concepts de super-espace et de superchamps ; concepts que nous allons présenter en détails dans le prochain chapitre.

1.2 Supersymétrie

En 1967, Coleman et Mandula [11] fournissent un argument rigoureux qui prouve sous certaines hypothèses, que le groupe de symétrie continu maximal respectant le groupe de Lorentz, à quatre dimensions, est le groupe de Poincaré. Si on cherche alors, à rajouter des symétries continues d'espace-temps, toute théorie devient triviale (*i.e.* sans interaction). Ce théorème n'autorise donc, *a priori*, que des symétries internes.

Cependant, il est possible de contourner le problème en "relâchant" certaines des hypothèses de ce théorème, à savoir que l'algèbre utilisée n'implique que des relations de commutation. Ceci autorise alors, l'utilisation d'une algèbre avec des anticommutateurs, appelée algèbre de Lie graduée. Ainsi, le fait d'incorporer des générateurs qui anticommulent, ouvre la voie à la supersymétrie. En effet, pour pouvoir relier des composantes

bosoniques (qui commutent) et fermioniques (qui anticommutent), les générateurs de supersymétrie doivent, eux-mêmes, posséder le caractère fermionique. Par conséquent, l'algèbre de Lie de la supersymétrie est une algèbre de Lie graduée, avec des éléments pairs (possédant le caractère bosonique) et impairs (avec le caractère fermionique).

Cette algèbre est donc définie par l'introduction de nouveaux générateurs, qui se transforment comme les représentations $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$ du groupe de Lorentz. Ce sont donc des spineurs de Weyl. Comme ils se transforment sous le groupe de Lorentz, la supersymétrie n'est pas une symétrie interne. Cependant, ce ne sont ni des vecteurs, ni des tenseurs (ils ne portent pas d'indices de Lorentz). Ils ne sont, dès lors, pas soumis au théorème de Coleman-Mandula. On peut alors considérer que la supersymétrie est une extension du groupe de Poincaré.

Il est intéressant de noter qu'en 1975, Haag, Lopuszański et Sohnius ont prouvé que la supersymétrie était la seule symétrie additionnelle de la matrice S autorisée par ces hypothèses de Coleman-Mandula étendues ([65] et [93] pour un traitement plus récent).

Dans cette thèse, nous allons travailler sur deux champs d'investigations de la supersymétrie. D'une part, nous présenterons le formalisme des superchamps, non sans avoir exhibé l'algèbre. Et nous nous concentrerons sur les représentations chirales et vectorielles. D'autre part, nous présenterons le formalisme géométrique de la supersymétrie ainsi que son application à la construction de modèles supersymétriques. Ceci nous amènera à présenter les éléments clefs de la construction d'un modèle supersymétrique phénoménologiquement viable : le Modèle Standard Supersymétrique Minimal (MSSM).

Cette présentation succincte du MSSM, nous permettra de nous intéresser à un problème particulier dans la partie suivante : la suppression du canal Zh dans l'annihilation de neutralinos au repos, puisque ce processus est potentiellement intéressant dans le cadre de recherche de Matière Noire (MN) supersymétrique. Nous mènerons dans un premier temps une étude numérique afin de démontrer l'intérêt d'un tel canal. Ensuite, un calcul d'amplitude sera réalisé avec des spineurs polarisés afin de démontrer l'importance de la polarisation dans la désintégration de neutralinos au repos. Puis, nous mettrons en évidence les problèmes liés à la divergence haute énergie pour des bosons de jauge massifs polarisés longitudinalement, ainsi que l'importance de la jauge choisie pour mener les calculs. Ceci nous mènera à étudier l'indépendance de jauge pour les deux diagrammes intervenant dans le calcul de l'amplitude cherchée. Ainsi, nous mettrons en évidence une première relation non triviale. Après cette étude, nous montrerons par des techniques "Pinch" le lien entre l'unitarité à haute énergie de la théorie et l'unitarité des matrices de mélanges des neutralinos. On aura alors une deuxième relation, qui s'avérera nécessaire pour expliquer l'annulation relative entre les deux diagrammes et donc la disparition du canal qui semblait potentiellement intéressant. Riche de notre expérience sur l'annihilation de neutralino au repos en un boson de jauge et un scalaire de Higgs, nous investiguerons finalement, les propriétés de polarisations des bosons W lors de l'annihilation de matière noire. Une fois mise en évidence, la polarisation des W nous permettra de montrer la différence attendue dans les spectres par rapport au cas non polarisé. S'ensuivra une discussion sur la possibilité de mettre en évidence ce phénomène pour des expériences de type télescope à neutrinos ou pour l'explication des données de l'expérience HEAT.

Ensuite, nous reviendrons à l'algèbre de supersymétrie ainsi qu'aux autres représentations possibles du multiplet d'hélicité $(0, 1/2)$. Après une présentation non exhaustive des différents multiplets de supersymétrie $N = 1$ à quatre dimensions, nous présenterons leurs réalisations en termes de superchamp pour le multiplet $(0, 1/2)$. Nous insisterons en particulier sur un type de représentation peu connu, que nous appellerons multiplet X . Ce multiplet sera présenté en détails. Subséquemment, nous introduirons un mécanisme

de dualité entre différents objets sans supersymétrie tout d'abord, puis avec supersymétrie. Ce mécanisme, nous permettra de mettre en évidence des liens entre différents superchamps qui sont différentes facettes d'une même représentation en termes d'états physique : la représentation $(0,1/2)$. Il sera alors naturel de développer la dualité multiplet X , multiplet de 3-forme en composantes afin de vérifier ce que l'on a obtenu avec le formalisme des superchamps. Enfin, nous présenterons quelques couplages possibles avec le multiplet X , mais aussi avec le multiplet de 3-forme. Nous concluons sur les différentes représentations du multiplet $(0,1/2)$ rencontrées, leurs rôles respectifs en tant que représentations de champs physiques, ainsi que leurs liens internes par relation de dualité.

1.3 Algèbre de supersymétrie

En théorie quantique des champs, une densité lagrangienne est construite de manière à être invariante sous le groupe de Poincaré. Ce groupe est lui-même une extension du groupe de Lorentz (groupe des rotation à quatre dimensions), qui possède le tenseur \mathbf{M}_{mn} pour générateur, auquel on adjoint le vecteur \mathbf{P}_m : le générateur du groupe des translations, avec m, n , des indices de Lorentz (ou indices vectoriels). L'algèbre du groupe de Poincaré est donnée par les relations de commutations de ses générateurs :

$$[\mathbf{P}_m, \mathbf{P}_n] = 0, \quad (1.1)$$

$$[\mathbf{M}_{mn}, \mathbf{P}_p] = i(\eta_{mp}\mathbf{P}_n - \eta_{np}\mathbf{P}_m), \quad (1.2)$$

$$[\mathbf{M}_{mn}, \mathbf{M}_{pk}] = i(\eta_{mp}\mathbf{M}_{nk} - \eta_{mk}\mathbf{M}_{np} - \eta_{np}\mathbf{M}_{mk} + \eta_{nk}\mathbf{M}_{mp}). \quad (1.3)$$

Ce groupe est étendu au groupe de super-Poincaré en ajoutant les générateurs fermioniques : \mathbf{Q}_α et $\overline{\mathbf{Q}}^{\dot{\beta}}$, qui sont des spineurs de Weyl ; α et $\dot{\beta}$ étant des indices spinoriels : $\alpha = 1, 2$; $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$. Ces générateurs satisfont les relations supplémentaires [65] :

$$\{\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta\} = 0, \{\overline{\mathbf{Q}}^{\dot{\alpha}}, \overline{\mathbf{Q}}^{\dot{\beta}}\} = 0, \{\mathbf{Q}_\alpha, \overline{\mathbf{Q}}^{\dot{\beta}}\} = -2(\sigma^m \epsilon)_\alpha^{\dot{\beta}} \mathbf{P}_m, \quad (1.4)$$

$$[\mathbf{P}_m, \mathbf{Q}_\alpha] = 0, [\mathbf{P}_m, \overline{\mathbf{Q}}^{\dot{\beta}}] = 0, [\mathbf{P}_m, \mathbf{Q}_\alpha] = 0, \quad (1.5)$$

$$[\mathbf{M}_{mn}, \mathbf{Q}_\alpha] = -i(\sigma_{mn})_\alpha^{\dot{\beta}} \mathbf{Q}_\beta, \quad [\mathbf{M}_{mn}, \overline{\mathbf{Q}}^{\dot{\alpha}}] = -i(\overline{\sigma}_{mn})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \overline{\mathbf{Q}}^{\dot{\beta}}, \quad (1.6)$$

avec σ_m , les matrices de Pauli (les conventions sont données en annexe A). L'algèbre ainsi obtenue (relations (1.1) à (1.6)) est alors dite graduée car elle contient en plus des commutateurs, des anticommutateurs. On parle aussi de superalgèbre du groupe de super-Poincaré. Alors que le groupe de Poincaré contient 10 générateurs bosoniques : \mathbf{P}_m et \mathbf{M}_{mn} , le groupe de Poincaré élargi contient de plus 4 générateurs fermioniques : \mathbf{Q}_α et $\overline{\mathbf{Q}}^{\dot{\beta}}$, soit un total de 14 générateurs.

En utilisant les matrices de Pauli et leurs propriétés par rapport à l'algèbre de Clifford, nous pouvons mettre en évidence la relation suivante :

$$\sigma^m \overline{\sigma}^n = -\eta^{mn} + 2\sigma^{mn}. \quad (1.7)$$

Il s'ensuit que :

$$\text{tr}(\sigma^m \overline{\sigma}^n) = -2\eta^{mn}. \quad (1.8)$$

Si nous appliquons cette identité à la dernière relation de la ligne (1.4), on obtient alors :

$$(\overline{\sigma}^n)^{\dot{\beta}\alpha} \{\mathbf{Q}_\alpha, \overline{\mathbf{Q}}_{\dot{\beta}}\} = 4\mathbf{P}^n. \quad (1.9)$$

Maintenant, prenons : $n=0$. Si nous nous limitons aux éléments de matrice de type :

$$4 \langle \psi | \mathbf{P}^0 | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{Q}_1 \bar{\mathbf{Q}}_1 + \bar{\mathbf{Q}}_1 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \bar{\mathbf{Q}}_2 + \bar{\mathbf{Q}}_2 \mathbf{Q}_2 | \psi \rangle, \quad (1.10)$$

où la relation de conjugaison pour un spineur de Weyl : $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \equiv (\chi_{\alpha})^*$ a été utilisée, nous obtenons :

$$4 \langle \psi | \mathbf{P}^0 | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{Q}_{\alpha} (\mathbf{Q}_{\alpha})^* + (\mathbf{Q}_{\alpha})^* \mathbf{Q}_{\alpha} | \psi \rangle \geq 0. \quad (1.11)$$

Donc, dans une théorie supersymétrique l'énergie de tout état est défini positif. Et l'absence d'énergie du vide est la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un vide supersymétrique

$$\langle 0 | \mathbf{P}^0 | 0 \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{Q}_{\alpha} | 0 \rangle = 0. \quad (1.12)$$

Cette remarque va se révéler très importante lors de l'étude de la brisure de supersymétrie.

1.4 Multiplets de supersymétrie

À partir de l'algèbre (1.1-1.3), il est possible de construire des représentations irréductibles du groupe de Poincaré. Pour cela, la méthode du petit groupe ou méthode de Wigner [98] est utilisée, dans le but de construire les états propres de la représentation. En incorporant les relations supplémentaires (1.4-1.6) induites par la supersymétrie, nous procédons de manière similaire. Nous obtenons alors les représentations irréductibles de l'algèbre de super-Poincaré en considérant les états massifs distinctement de ceux de masse nulle [38, 46, 85]. Nous trouvons ainsi que les particules appartenant à un même multiplet ont même masse, mais aussi que le nombre de degrés de liberté bosoniques est égal au nombre de degrés de liberté fermioniques dans ce même multiplet. Il est possible de montrer ces propriétés, directement à partir de l'algèbre.

D'une part, l'opérateur de masse : \mathbf{P}^2 , qui est un Casimir du groupe de Poincaré, est aussi un opérateur de Casimir de l'algèbre de supersymétrie, à cause des relations de commutation (1.4) entre l'opérateur \mathbf{P}_m et les opérateurs \mathbf{Q}_{α} , $\bar{\mathbf{Q}}_{\dot{\beta}}$. Par conséquent toutes les particules d'un même multiplet posséderont la même masse.

D'autre part, le vecteur de Pauli-Lubanski :

$$\mathbf{W}^m = \frac{1}{2} \epsilon^{mnpq} \mathbf{P}_n \mathbf{M}_{pq}, \quad (1.13)$$

qui est un Casimir pour le groupe de Poincaré et à partir duquel le spin des particules est défini, n'est pas un Casimir pour l'algèbre de supersymétrie. C'est pourquoi, une représentation irréductible de l'algèbre de supersymétrie contiendra des états physiques de spins différents, mais de même masse. Nous parlerons donc de multiplets de supersymétrie ou de supermultiplet.

De plus, les opérateurs \mathbf{Q}_{α} , $\bar{\mathbf{Q}}_{\dot{\beta}}$ étant des opérateurs fermioniques, ils auront la propriété de changer le nombre fermionique d'une unité, ce qui peut s'écrire :

$$(-1)^{N_F} \mathbf{Q}_{\alpha} = -\mathbf{Q}_{\alpha} (-1)^{N_F}, \quad (1.14)$$

où N_F est l'opérateur du nombre fermionique. Maintenant, si nous considérons la trace sur une représentation finie de l'algèbre : R (supermultiplet), alors :

$$tr_R \left[(-1)^{N_F} \{ \mathbf{Q}_{\alpha}, \bar{\mathbf{Q}}_{\dot{\beta}} \} \right] = tr_R \left[-\mathbf{Q}_{\alpha} (-1)^{N_F} \bar{\mathbf{Q}}_{\dot{\beta}} + (-1)^{N_F} \bar{\mathbf{Q}}_{\dot{\beta}} \mathbf{Q}_{\alpha} \right] \quad (1.15)$$

$$= tr_R \left[-\mathbf{Q}_{\alpha} (-1)^{N_F} \bar{\mathbf{Q}}_{\dot{\beta}} + \mathbf{Q}_{\alpha} (-1)^{N_F} \bar{\mathbf{Q}}_{\dot{\beta}} \right] \quad (1.16)$$

$$= 0, \quad (1.17)$$

où nous avons utilisé la propriété de cyclicité de la trace.

Si la propriété d'anticommutation des opérateurs fermioniques est prise en compte, nous obtenons :

$$tr_R \left[(-1)^{N_F} \mathbf{P}_m \right] = 0 \Rightarrow tr (-1)^{N_F} = 0, \text{ pour } \mathbf{P}_m \neq 0 \text{ fixé.}$$

Avec la définition : $(-1)^{N_F} = +1$ pour un état bosonique et $(-1)^{N_F} = -1$ pour un état fermionique, alors nous pouvons mettre en évidence le résultat suivant :

$$n_B(R) - n_F(R) = 0, \quad (1.18)$$

avec n_B et n_F , respectivement nombre de degrés de liberté bosoniques et fermioniques dans la représentation R de l'algèbre de supersymétrie. Dès lors, une représentation de l'algèbre de supersymétrie possède le même nombre d'états bosoniques, que d'états fermioniques ayant même masse, ce qui constitue ce que nous avons appelé auparavant un supermultiplet. Les supermultiplets les plus connus sont :

Le multiplet chiral

$$\Phi \sim (A, \chi_\alpha | F) \text{ avec } \begin{cases} A & : \text{ champ scalaire complexe (2B),} \\ \chi_\alpha & : \text{ spineur de Weyl (4F),} \\ F & : \text{ champ scalaire complexe auxiliaire (2B).} \end{cases}$$

Le multiplet vectoriel de masse nulle

$$V \sim (a_m, \lambda_\alpha, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} | D) \text{ avec } \begin{cases} a_m & : \text{ champ de jauge (3B),} \\ \lambda_\alpha, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} & : \text{ spineurs de Majorana (4F),} \\ D & : \text{ champ scalaire réel auxiliaire (1B).} \end{cases}$$

Nous avons pris le soin de noter entre parenthèses les nombre de degré de libertés fermioniques (F) et bosonique (B) pour des particules n'étant pas sur couche de masse.

À partir de ces deux représentations, nous sommes capables de construire la version supersymétrique du modèle standard, le fameux Modèle Standard Supersymétrique Minimal (MSSM). Nous passerons sous silence dans cette thèse, la généralisation supersymétrique de la brisure électrofaible par le mécanisme de Higgs, qui fait intervenir un champ vectoriel massif, puisqu'une telle représentation est elle-même réductible.

Chapitre 2

Super-espace et superchamps : approche traditionnelle

La construction de lagrangiens dans une théorie des champs supersymétrique nécessite de représenter les multiplets par des superchamps. Eux-mêmes sont définis sur un espace généralisé dont on va détailler l'élaboration. Cela nous permettra de présenter l'approche traditionnelle pour construire une théorie supersymétrique.

Sommaire

2.1	Superchamp et représentation de l'algèbre	9
2.2	Superchamp chiral	11
2.3	Lagrangien supersymétrique renormalisable	13
2.4	Superchamp vectoriel	14
2.5	Théorie de jauge supersymétrique	16

2.1 Superchamp et représentation de l'algèbre

Les opérateurs définissant l'algèbre de supersymétrie (1.4) sont définis sur l'espace des états, ou espace de Hilbert. Or, il est plus commode de travailler avec une représentation de l'algèbre sur un espace vectoriel. Nous savons que le générateur des translations (infinitésimales) peut être représenté sur un espace vectoriel à quatre dimensions par l'action d'une dérivée d'espace-temps :

$$a^m \partial_m f(x^m) = [f, ia^m \mathbf{P}_m], \quad (2.1)$$

où a^m est le paramètre infinitésimal de la translation, et f une fonction de l'espace-temps (pouvant représenter un champ physique). Il serait utile d'avoir le même type de relation pour les charges de supersymétrie : \mathbf{Q}_α et $\overline{\mathbf{Q}}^{\dot{\alpha}}$. Toutefois, ces opérateurs étant fermioniques, il est alors nécessaire d'étendre la notion usuelle d'espace-temps à celle de super-espace, intégrant deux variables de Grassmann, θ_α et $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, en plus de la coordonnée d'espace-temps usuelle x^m . Alors qu'un champ ordinaire ne dépend que des points d'espace-temps, le superchamp \mathcal{F} va dépendre en prime des variables de Grassmann θ_α et $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ qui se transforment comme des spineurs de Weyl sous le groupe de Lorentz. Les translations et les transformations de supersymétrie vont alors être réalisées comme l'action d'opérateurs

différentiels sur le super-espace ainsi défini, telles que :

$$a^m \partial_m \mathcal{F} (x^m, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) = [\mathcal{F}, i a^m \mathbf{P}_m], \quad \zeta \cdot Q \mathcal{F} (x^m, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) = [\mathcal{F}, i \zeta \cdot \mathbf{Q}],$$

avec

$$\zeta \cdot Q = \zeta^\alpha Q_\alpha + \bar{\zeta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}. \quad (2.2)$$

Il faut maintenant trouver une définition des opérateurs Q_α et $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$, en tant qu'opérateurs différentiels, qui reproduise l'action des charges de supersymétrie sur un élément du groupe (lui-même agissant sur les états à une particule de l'espace de Hilbert). Or, un élément fini de ce groupe est défini par¹ :

$$F (x^m, \theta, \bar{\theta}) = \exp (\theta \cdot Q + \bar{\theta} \bar{Q} - i x^m P_m). \quad (2.3)$$

Nous devons construire une représentation linéaire de ce groupe. Ceci peut être réalisé en considérant l'action induite par les éléments du groupe dans l'espace des paramètres $(x^m, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$. Avec la définition précédente, il est possible de multiplier deux éléments du groupe, de manière à obtenir :2.4

$$F (x^m, \theta, \bar{\theta}) F (a^m, \xi, \bar{\xi}) = F (x^m + a^m + i \xi \sigma^m \bar{\theta} - i \theta \sigma^m \bar{\xi}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}), \quad (2.4)$$

où l'utilisation de la formule de Hausdorff :

$$e^A e^B = \exp \left(A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \dots \right), \quad (2.5)$$

a été simplifiée par le fait que les commutateurs d'ordres supérieurs ont disparus grâce aux propriétés d'anticommutation des variables de Grassmann.

Ainsi, les générateurs de supersymétrie induisent un mouvement dans l'espace des paramètres du groupe :

$$\exp ((\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q} - i a^m P_m)) : (x^m, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow (x^m + a^m + i \xi \sigma^m \bar{\theta} - i \theta \sigma^m \bar{\xi}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}). \quad (2.6)$$

D'autre part, si nous réalisons un développement du superchamp :

$$\begin{aligned} F (x^m + a^m + i \xi \sigma^m \bar{\theta} - i \theta \sigma^m \bar{\xi}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) \\ = F (x^m, \theta, \bar{\theta}) + (a^m + i \xi \sigma^m \bar{\theta} - i \theta \sigma^m \bar{\xi}) \frac{\partial F}{\partial x^m} + \xi^\alpha \frac{\partial F}{\partial \theta^\alpha} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

il est alors possible d'identifier l'action de l'algèbre de supersymétrie sur le superchamp :

$$F (x^m, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \exp (i (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q} + a^m P_m)) F (x^m, \theta, \bar{\theta}), \quad (2.8)$$

qui est donc générée par des opérateurs différentiels agissant sur des fonctions de l'espace des paramètres :

$$P_m = -i \partial_m, \quad (2.9)$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} (\sigma^m \epsilon)_{\alpha}^{\dot{\alpha}} \partial_m, \quad (2.10)$$

$$\bar{Q}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i \theta^\alpha (\sigma^m \epsilon)_\alpha^{\dot{\alpha}} \partial_m. \quad (2.11)$$

¹on se contente d'éléments du groupe connexes à l'identité, car on ne s'intéresse qu'à des transformations infinitésimales

En utilisant la relation : $\xi \sigma^m \bar{\theta} = -\bar{\theta} \bar{\sigma}^m \xi$, et en notant que les générateurs agissent sur la droite et non sur la gauche comme dans la formule (2.4), nous trouvons donc :

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\} = -2i (\sigma^m \epsilon)_\alpha^{\dot{\alpha}} \partial_m. \quad (2.12)$$

Ainsi, cette représentation linéaire de l'algèbre de supersymétrie est cohérente avec l'algèbre de supersymétrie (1.4).

Il est important de noter que le superchamp $F(x^m, \theta, \bar{\theta})$ peut être développé en fonction des variables (spinorielles) θ et $\bar{\theta}$. De par les propriétés d'anticommutation de ce type de variables, le développement sera fini et les coefficients de ce développement seront des champs ordinaires (c'est-à-dire des champs qui ne dépendent pas des variables de Grassmann, mais seulement de la coordonnée x^m). Il est possible de montrer que la représentation de l'algèbre construite à partir d'un superchamp générique F est réductible en général. Pour avoir une représentation irréductible, il faut imposer des conditions supplémentaires sur le superchamp F .

À partir de l'action de l'algèbre de supersymétrie sur un superchamp (2.8) et de l'expression des générateurs de cette algèbre (2.9), (2.10) et (2.11), il est aisé de noter que l'action d'une transformation infinitésimale de supersymétrie sur un superchamp s'écrit :

$$F \rightarrow F + \delta F, \text{ avec : } \delta F = (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) F. \quad (2.13)$$

À présent, nous allons nous intéresser aux contraintes à imposer de manière à travailler avec une représentation irréductible.

2.2 Superchamp chiral

Connaissant les opérateurs différentiels représentant l'algèbre sur le super-espace (2.10-2.11), il est évident que les dérivées usuelles : ∂_α et $\partial^{\dot{\alpha}}$, ne vont pas commuter avec les générateurs de l'algèbre (2.10) et (2.11). Il est alors possible de définir des opérateurs de dérivation covariants par rapport aux transformations de supersymétrie par :

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^m \epsilon)_\alpha^{\dot{\alpha}} \partial_m, \\ \bar{D}^{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i \theta^\alpha (\sigma^m \epsilon)_\alpha^{\dot{\alpha}} \partial_m. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Il faut noter que ces opérateurs dérivent d'une multiplication par la gauche des éléments du groupe (par opposition aux générateurs de l'algèbre qui sont définis par une multiplication par la droite (2.4)).

Avec cette définition, nous pouvons écrire les relations d'anticommutation suivantes :

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = \{\bar{D}^{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{\bar{D}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (2.15)$$

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}^{\dot{\alpha}}, \bar{D}^{\dot{\beta}}\} = 0, \quad \{D_\alpha, \bar{D}^{\dot{\alpha}}\} = 2i (\sigma^m \epsilon)_\alpha^{\dot{\alpha}} \partial_m \quad (2.16)$$

Comme ces opérateurs anticommulent avec les charges de supersymétrie, ils commutent avec les transformations de supersymétrie :

$$D_\alpha (\delta F) = \delta (D_\alpha F). \quad (2.17)$$

Par conséquent, les opérateurs D_α sont bien des dérivées covariantes par rapport aux transformations de supersymétrie.

Il est alors intéressant d'imposer des conditions du type :

$$\overline{D}_\alpha \Phi = 0, \quad (2.18)$$

sur un superchamp. Le superchamp ainsi contraint est appelé superchamp chirale. Le caractère fermionique des dérivées covariantes impose que l'application successive de trois dérivées spinorielles est nulle. Cette propriété implique qu'il est possible d'exprimer naturellement le superchamp chirale Φ en fonction d'un superchamp complexe non contraint V , que nous appellerons prépotentiel, avec :

$$\Phi = \overline{D}^2 V, \quad (2.19)$$

$$\overline{\Phi} = D^2 \overline{V}. \quad (2.20)$$

Il s'avère instructif de remarquer que :

$$\overline{D}^{\dot{\alpha}} \theta_\alpha = 0, \quad (2.21)$$

$$\overline{D}^{\dot{\alpha}} y^m = 0 \quad \text{avec } y^m = x^m + i\theta\sigma^m\overline{\theta}, \quad (2.22)$$

ce qui implique que n'importe quelle fonction de θ et y^m satisfera obligatoirement la contrainte de chiralité (2.18). Ainsi, $\Phi(y^m, \theta)$ est la solution la plus générale de l'équation (2.18). Le superchamp ainsi formé admet un développement en θ , ce qui nous donne :

$$\Phi(y^m, \theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\chi(y) + \theta\theta F(y), \quad (2.23)$$

où A et F sont des champs scalaires complexes et χ un spineur de Weyl. En utilisant les identités de Fierz (A.32), une translation $y^m \rightarrow x^m$ peut être réalisée, afin d'avoir la forme la plus générale du superchamp Φ au point x^m quelconque :

$$\Phi(x^m, \theta, \overline{\theta}) = A + \sqrt{2}\theta\chi + \theta\theta F + i\theta\sigma^m\overline{\theta}\partial_m A + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\overline{\theta}\sigma^m\partial_m\chi + \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}\square A. \quad (2.24)$$

Par le même raisonnement sur $\overline{\Phi}$, nous avons immédiatement le superchamp hermitique conjugué :

$$\overline{\Phi}(x^m, \theta, \overline{\theta}) = \overline{A} + \sqrt{2}\overline{\theta}\overline{\chi} + \overline{\theta}\overline{\theta}\overline{F} - i\theta\sigma^m\overline{\theta}\partial_m\overline{A} + \frac{i}{\sqrt{2}}\overline{\theta}\overline{\theta}\sigma^m\partial_m\overline{\chi} + \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}\square\overline{A}, \quad (2.25)$$

qui satisfait à la contrainte :

$$D_\alpha \overline{\Phi} = 0. \quad (2.26)$$

Si, Φ est un superchamp chirale gauche, $\overline{\Phi}$ est un superchamp chirale droit.

Comme déjà mentionné dans la section précédente, il est possible de calculer l'action d'une transformation infinitésimale de supersymétrie sur un superchamp :

$$\Phi \rightarrow \Phi + \delta\Phi, \quad \text{avec : } \delta\Phi = (\xi Q + \overline{\xi}\overline{Q})\Phi,$$

ce qui nous donne après calcul pour le superchamp chirale :

$$\delta A = \sqrt{2}\xi\chi, \quad (2.27)$$

$$\delta\chi_\alpha = \sqrt{2}\xi_\alpha F + i\sqrt{2}(\sigma^m\overline{\xi})_\alpha\partial_m A, \quad (2.28)$$

et surtout :

$$\delta F = i\sqrt{2}\overline{\xi}\sigma^m\partial_m\chi, \quad (2.29)$$

qui est une dérivée totale. La partie F d'un superchamp chirale nous permettra donc de construire des densités lagrangiennes supersymétriques.

2.3 Lagrangien supersymétrique renormalisable

Avant de construire un lagrangien supersymétrique renormalisable, il est utile d'étudier différents types de produits de superchamps chiraux en un même point. Comme Q , \bar{Q} , D et \bar{D} sont des opérateurs différentiels linéaires sur le super-espace, tout produit de superchamps chiraux (resp. antichiraux) est un superchamp chiral (resp. antichiral). De même, le produit d'un superchamp chiral par un superchamp antichiral donne un champ vectoriel dont nous étudierons les propriétés dans le prochain chapitre.

Nous commençons avec les calculs suivants :

$$\Phi_i(y, \theta) \Phi_j(y, \theta) = A_i A_j + \sqrt{2}\theta (\chi_i A_j + A_i \chi_j) + \theta\theta (A_i F_j + A_j F_i - \chi_i \chi_j), \quad (2.30)$$

et :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_i(y, \theta) \Phi_j(y, \theta) &= \bar{A}_i A_j + \sqrt{2}\theta \chi_j \bar{A}_i + \sqrt{2}\theta \bar{\chi}_i A_j + 2\theta \bar{\chi}_i \theta \chi_j + F_j \bar{A}_i \theta\theta \\ &\quad + \bar{F}_i A_j \theta\theta + \sqrt{2}\theta\theta \bar{\chi}_i F_j + \sqrt{2}\theta\theta \theta \chi_j \bar{F}_i + \theta\theta\theta \bar{F}_i F_j, \end{aligned} \quad (2.31)$$

enfin :

$$\begin{aligned} \Phi_i(y, \theta) \Phi_j(y, \theta) \Phi_k(y, \theta) &= A_i A_j A_k + \sqrt{2}\theta (\chi_i A_j A_k + A_i \chi_j A_k + A_i A_j \chi_k) \\ &\quad + \theta\theta (A_i A_j F_k + A_i F_j A_k + F_i A_j A_k - \chi_i \chi_j A_k - \chi_i \chi_k A_j - \chi_j \chi_k A_i). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Le coefficient de $\theta\theta$ est appelé F-terme et celui de $\theta\theta\theta$, D-terme. Il faut remarquer que nous avons travaillé au point : $y^m = x^m + i\theta\sigma\bar{\theta}$. Or, il serait plus intéressant d'exprimer les produits précédents en fonction d'un point d'espace-temps : x , générique. C'est ce que nous allons faire en utilisant les identités de Fierz (A.32), qui nous permettent de trouver :

$$[\Phi_i \Phi_j]_F = A_i F_j + A_j F_i - \chi_i \chi_j, \quad (2.33)$$

$$[\bar{\Phi}_i \Phi_j]_D = \bar{F}_i F_j - \partial_m \bar{A}_i \partial^m A_j - \frac{i}{2} \left(\bar{\chi}_i \sigma^m \partial_m \chi_j + \frac{i}{2} \partial_m \chi_i \sigma^m \bar{\chi}_j \right), \quad (2.34)$$

$$[\Phi_i \Phi_j \Phi_k]_F = A_i A_j F_k + A_i F_j A_k + F_i A_j A_k - \chi_i \chi_j A_k - \chi_i \chi_k A_j - \chi_j \chi_k A_i. \quad (2.35)$$

Il est nécessaire d'utiliser des termes qui sont invariants sous transformation de supersymétrie à une dérivée totale près. Nous avons montré précédemment (2.29) que le terme F possédait le comportement adéquat. D'autre part, une étude des superchamps vectoriels nous apprendrait qu'il en est de même pour les termes D . Donc, le lagrangien sera construit seulement à partir de F et D termes de produits de superchamps. Une forme générale pour un lagrangien supersymétrique, s'écrit :

$$\mathcal{L} = \sum_i [\bar{\Phi}_i \Phi_i]_D + ([W(\Phi)]_F + h.c.), \quad (2.36)$$

où $W(\Phi)$ est le "superpotentiel" qui doit contenir le produit de trois superchamps au maximum pour être renormalisable. , C'est pourquoi, il est possible d'exprimer ce superpotentiel comme :

$$W(\Phi) = \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} \lambda_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k, \quad (2.37)$$

avec m_{ij} et λ_{ijk} symétriques dans leurs indices. Un tel superpotentiel (2.37) est appelé superpotentiel de Wess-Zumino. Il est évident à partir des relations (2.33) et (2.35) que le superpotentiel contient un terme de masse (visible pour les scalaires après élimination du champ auxiliaire F) et un terme d'interaction, alors que le D terme du lagrangien (2.36) renferme la partie cinétique. Ce lagrangien décrit des particules scalaires et des fermions. Pour les champs de jauge, il faut attendre la prochaine section.

2.4 Superchamp vectoriel

Dans la partie précédente, nous avons utilisé des contraintes pour avoir un superchamp chirale. Maintenant, en imposant au superchamp général la contrainte de réalité, nous allons construire le superchamp vectoriel. Nous utilisons un paramétrage un peu spécial, mais sans perte de généralité qui nous permettra d'éliminer toute composante pouvant être issue d'une représentation chirale :

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C + \sqrt{2}\theta\psi + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + 4\theta\bar{\theta}H + 4\bar{\theta}\theta\bar{H} - 2\sqrt{2}\theta\sigma^m\bar{\theta}V_m \\ & + 4\sqrt{2}\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi\right] + 4\sqrt{2}\bar{\theta}\theta\left[\lambda + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\psi}\right] + 16\theta\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\left[D + \frac{1}{2}\partial_m\partial^m C\right], \end{aligned} \quad (2.38)$$

où C et D sont des champs scalaires réels ; H un scalaire complexe, ψ et λ des spineurs de Weyl, V_m un champ vectoriel réel. Il est utile pour la suite de calculer les transformations de supersymétrie de ce superchamp :

$$\delta V = (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) V, \quad (2.39)$$

qui déterminent les transformations pour les composantes :

$$\delta C = \sqrt{2}(\xi\psi + \bar{\xi}\bar{\psi}), \quad (2.40)$$

$$\delta\psi^\alpha = -\sqrt{2}\xi^\alpha H - (\bar{\xi}\bar{\sigma}^m)^\alpha (V_m - i\sqrt{2}\partial_m C), \quad (2.41)$$

$$\delta\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = -\sqrt{2}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{H} + (\xi\sigma^m)_{\dot{\alpha}} (V_m + i\sqrt{2}\partial_m C), \quad (2.42)$$

$$\delta H = -\sqrt{2}\bar{\xi}\left(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi\right), \quad (2.43)$$

$$\delta\bar{H} = -\sqrt{2}\xi\left(\lambda + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\psi}\right), \quad (2.44)$$

$$\delta V_m = (\xi\sigma_m\bar{\lambda} - \bar{\xi}\bar{\sigma}_m\lambda) + \sqrt{2}\partial_m(\xi\psi + \bar{\xi}\bar{\psi}) \quad (2.45)$$

$$\delta\lambda^\alpha = \sqrt{2}\xi^\alpha D + i(\xi\sigma^{mn})^\alpha f_{mn} \quad (2.46)$$

$$\delta\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} = \sqrt{2}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} D - i(\bar{\xi}\bar{\sigma}^{mn})_{\dot{\alpha}} f_{mn} \quad (2.47)$$

$$\delta D = \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_m(\lambda\sigma^m\bar{\xi} + \xi\sigma^m\bar{\lambda}) \quad (2.48)$$

Ainsi, le lecteur peut remarquer que les champs λ , $\bar{\lambda}$, D et $f_{mn} = \partial_m V_n - \partial_n V_m$ forment une représentation irréductible de l'algèbre de supersymétrie et la variation de D est une dérivée totale.

Il est alors possible d'isoler les champs de la représentation irréductible² par application successive de dérivées covariantes sur le superchamp V :

$$W_\alpha = -\frac{i}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V. \quad (2.49)$$

Le champ ainsi construit est chirale car l'application successive de trois dérivées \bar{D} est nul, mais c'est aussi un invariant de jauge par construction. À partir de la forme explicite des opérateurs covariants de dérivation (2.14) et du développement du superchamp réel

²on considère alors que les autres champs sont non physiques, puisqu'on ne s'intéresse qu'à la partie (1/2,1) du multiplet réductible V .

(2.38), nous pouvons calculer W_α . Ce champ étant chiral, il est plus commode de se placer au point $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$, pour simplifier le calcul (voir section 2.2) :

$$W_\alpha(y) = -i\lambda_\alpha + \theta_\alpha D - i(\sigma^{mn})_\alpha{}^\beta \theta_\beta f_{mn} + \theta\theta\sigma_{\alpha\beta}^m \partial_m \bar{\lambda}^\beta, \quad (2.50)$$

dont les composantes sont invariantes sous transformation de jauge. De même, le superchamp hermitique conjugué peut être construit par application successives de dérivées spinorielles :

$$\bar{W}^{\dot{\alpha}} = \frac{i}{4} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} V. \quad (2.51)$$

Le superchamp ainsi construit admet le développement suivant :

$$\bar{W}^{\dot{\alpha}}(\bar{y}) = i\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} D + i(\bar{\sigma}^{mn})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} f_{mn} + \bar{\theta} \bar{\theta} \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} \partial_m \lambda_\beta. \quad (2.52)$$

Les superchamps spinoriels W_α et $\bar{W}^{\dot{\alpha}}$ satisfont respectivement les contraintes de chiralité (2.18) et d'antichiralité (2.26). De plus, il peut être remarqué que d'après les relations d'anticommutation (2.15) et (2.16), nous avons par ailleurs l'égalité suivante :

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} = D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha. \quad (2.53)$$

Cette relation implique la contrainte supplémentaire :

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} = D^\alpha W_\alpha. \quad (2.54)$$

Les superchamps W_α et $\bar{W}^{\dot{\alpha}}$ sont appelés tenseur de champ par analogie avec le tenseur de champ pour une théorie de jauge non supersymétrique comme l'électrodynamique quantique³ par exemple.

Ce superchamp a un intérêt crucial en supersymétrie, car il nous permet de construire un lagrangien cinétique invariant pour le champ de jauge [94] :

$$\mathcal{L}_{cin} = -\frac{1}{4} \left([W^\alpha W_\alpha]_F + [\bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}]_{\bar{F}} \right), \quad (2.55)$$

$$= -\frac{1}{4} f^{mn} f_{mn} - \frac{i}{2} (\bar{\lambda} \bar{\sigma}^m \partial_m \lambda + \lambda \sigma^m \partial_m \bar{\lambda}) + \frac{1}{2} D^2. \quad (2.56)$$

Présentement, nous allons montrer un exemple de construction particulière d'un superchamp vectoriel qui sera de grande importance pour la suite. À l'aide de superchamps chiraux, nous pouvons construire un superchamp réel :

$$\begin{aligned} i(\Phi - \bar{\Phi}) &= i(A - \bar{A}) + i\sqrt{2}(\theta\chi - \bar{\theta}\bar{\chi}) + 4i\theta\theta F - 4i\bar{\theta}\bar{\theta} \bar{F} \\ &\quad - 2\sqrt{2}i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m(A + \bar{A}) - 2\sqrt{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi + 2\sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\chi} + 16i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square(A - \bar{A}). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Si l'expression précédente est identifiée avec l'équation (2.38), nous obtenons :

$$\begin{aligned} C &= i(A - \bar{A}), & \psi &= i\chi, & H &= iF, \\ V_m &= \partial_m(A + \bar{A}), & \lambda &= 0, & D &= 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Avec la forme générale (2.38) et cette forme particulière (2.57) du superchamp vectoriel, nous sommes capable de conserver la partie purement vectorielle du superchamp réel et de se passer des termes issus de la représentation chirale, ceci en étendant la notion de transformation de jauge habituelle :

$$V_m \rightarrow V_m + \partial_m \alpha \quad \text{devient} : \quad V \rightarrow V + i(\Phi - \bar{\Phi}). \quad (2.59)$$

C'est cette extension que nous allons étudier dans la section suivante.

³ou QED, acronyme de Quantum ElectroDynamic en anglais

2.5 Théorie de jauge supersymétrique

Le travail précédent a permis de montrer la possibilité de paramétrer les transformations de jauge par des superchamps chiraux $\Lambda, \bar{\Lambda}$, telles que :

$$\begin{aligned} V &\mapsto V + i(\Lambda - \bar{\Lambda}), \\ \Phi &\mapsto e^{-2ig\Lambda}\Phi, \\ \bar{\Phi} &\mapsto e^{2ig\bar{\Lambda}}\bar{\Phi}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Il faut cependant faire attention au fait que Λ et $\bar{\Lambda}$ sont des superchamps chiraux. Pour une symétrie $U(1)$ globale, nous n'avons pas besoin de champ de jauge. La phase globale est alors une constante, qui peut être réelle pour un groupe de symétrie abélienne de type $U(1)$. Cette constante satisfera automatiquement la condition de chiralité (2.18), c'est donc bien une représentation de l'algèbre de supersymétrie. Par contre, si la symétrie doit être jaugée, il est évident que la phase Λ devra être un superchamp chiral local. En conséquence la composante la plus basse dans son développement en terme de variable de ce superchamp sera un champ scalaire complexe. La transformation de jauge ainsi étendue au cas supersymétrique, sera obligatoirement une représentation du groupe de symétrie⁴ $U(1)_{\mathbb{C}}$. Donc, en plus de l'invariance de jauge habituelle, une invariance d'échelle est présente, due à la partie imaginaire du scalaire complexe.

Les champs C , H et χ du superchamp vectoriel ne sont pas des degrés de liberté physiques, puisqu'ils peuvent être annulés par une condition de jauge judicieusement choisie (qui aura aussi la vertu de fixer les champs chiraux à une échelle d'énergie). À l'inverse, les champs λ et D sont bien invariants de jauge, et le champ vectoriel V_m est bien soumis à la condition de jauge usuelle :

$$V_m \rightarrow V_m + \partial_m (A + \bar{A}). \quad (2.61)$$

Nous pouvons remarquer que dorénavant, le couplage $\bar{\Phi}\Phi$ (lagrangien cinétique) n'est plus invariant de jauge. Le nouveau couplage minimal invariant est alors :

$$\mathcal{L}_{inv} = \bar{\Phi}e^{2gV}\Phi. \quad (2.62)$$

Avec la supertransformation de jauge et les propriétés du champ vectoriel, nous constatons qu'il est possible de travailler avec une représentation irréductible de l'algèbre de supersymétrie, *i.e.* travailler dans la jauge qui annule les champs non physiques. Ceci revient à faire une transformation de jauge, dite de Wess-Zumino, avec un paramètre Λ_{WZ} qui vérifie les conditions :

$$-i(A - \bar{A}) = C, \quad -i\chi = \psi, \quad -iF = H. \quad (2.63)$$

Nous constatons, que seule la partie imaginaire du champ A est fixée dans cette jauge, la liberté sur la partie réelle de ce champ nous permet de conserver l'invariance de jauge habituelle. Ainsi cette jauge fixe la partie imaginaire de la symétrie $U(1)_{\mathbb{C}}$ et donc l'invariance d'échelle pour nous laisser avec le groupe de jauge habituel : $U(1)$.

Dans cette jauge, le superchamp réel s'écrit :

$$V_{WZ} = -2\sqrt{2}\theta\sigma^m\bar{\theta}V_m + 4\sqrt{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} + 4\sqrt{2}\bar{\theta}\theta\lambda + 16\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D, \quad (2.64)$$

⁴Nous utilisons ici la notation $U(1)_{\mathbb{C}}$ pour signifier le groupe de symétrie habituel $U(1)$ plus une invariance d'échelle. Cette notation est un abus de langage, puisque le paramètre du groupe est complexe. La symétrie ne peut donc pas être unitaire.

il est alors possible de calculer :

$$V_{WZ}^2 = - \sqrt{2} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} V^m V_m, \quad (2.65)$$

et

$$V_{WZ}^3 = 0. \quad (2.66)$$

Ainsi à partir de l'ordre trois, le développement de l'exponentielle dans le lagrangien (2.62) sera nul. Dans cette jauge, le lagrangien invariant contiendra un nombre fini de termes, ce qui simplifie l'étude de la théorie.

Cependant, suite à l'analyse des transformations (2.41), (2.42), (2.43) et (2.44), il est possible de s'apercevoir que des termes "non physiques" réapparaissent au cours d'une transformation de supersymétrie. Donc, cette jauge n'est pas invariante sous transformation de supersymétrie. Nous pouvons cependant maintenir les bonnes propriétés de la jauge de Wess-Zumino, en associant à chaque transformation de supersymétrie, une transformation de jauge compensatoire définie par :

$$\begin{aligned} \chi^\alpha &= (\bar{\xi} \bar{\sigma}^m)^\alpha V_m, & 2\sqrt{2}F &= \bar{\xi} \bar{\lambda}, \\ \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} &= (\xi \sigma^m)_{\dot{\alpha}} V_m, & 2\sqrt{2}\bar{F} &= \xi \lambda. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Ce processus paraît quelque peu arbitraire. Pourtant, nous montrerons dans les chapitres suivants, comment trouver un mécanisme plus intuitif en passant par le formalisme de la géométrie différentielle sur le super-espace.

Chapitre 3

Géométrie différentielle dans le super-espace

La construction de lagrangien supersymétrique se faisant par multiplications de super-champs, et l'utilisation pour ces derniers de développements explicites dans les variables de Grassmann, θ et $\bar{\theta}$, rendent cette méthode très lourde en termes de calcul, mais aussi au niveau conceptuel. Ainsi, il a été montré dans le chapitre précédent la nécessité de fixer une partie de l'invariance de jauge permise par une théorie supersymétrique pour s'affranchir de termes non physiques. Termes, qui réapparaissent inlassablement sous transformation de supersymétrie, si nous ne prenons garde de réaliser des transformations de jauge compensatoires. Pour ces raisons, il est judicieux d'introduire des méthodes de calcul basées sur des concepts géométriques. Cette démarche permet d'obtenir des résultats identiques, d'une façon plus élégante, aussi bien du point de vue conceptuel qu'au niveau purement calculatoire. En géométrie, nous renonçons à travailler avec des développements dans les variables de Grassmann et l'utilisation de dérivées covariantes sous transformation de jauge et de supersymétrie y est substituée. Tout se ramène alors à des manipulations algébriques sur ces dérivées. Il est alors possible d'avoir une description géométrique de la supersymétrie [94].

Sommaire

3.1	Définition du super-espace	19
3.2	Opérations de dérivation	21
3.3	Dérivée de Lie	22
3.4	Transformation de supersymétrie	23

3.1 Définition du super-espace

Le super-espace est un espace-temps muni de composantes spinorielles, comme nous l'avons déjà présenté dans la section 2.1. Ainsi, un point du super-espace est défini par la donné de : $z^M = (x^m, \theta^\mu, \bar{\theta}_{\dot{\mu}})$, où M est un superindice, m un indice de Lorentz, μ et $\dot{\mu}$ des indices spinoriels. Nous avons la loi de commutation :

$$z^M z^N = (-1)^{mn} z^N z^M, \quad (3.1)$$

avec la graduation : $m = 0$ pour M vectoriel,
 $m = 1$ pour M spinoriel.

Il est alors possible de définir :

$\partial_M = \left(\partial_m, \frac{\partial}{\partial \theta^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\mu}}} \right)$ dérivée, repère de l'espace tangent du super-espace,
 $dz^M = (dx^m, d\theta^\mu, d\bar{\theta}_{\dot{\mu}})$ élément différentiel, repère de l'espace cotangent du super-espace
 (dual de l'espace tangent).

Dans ces conditions, nous avons une généralisation naturelle de la définition des champs de vecteurs qui sont des élément de l'espace tangent :

$$\xi = \xi^M \partial_M. \quad (3.2)$$

Le supervierbein $E^A = dz^M E_M^A$ est une généralisation du repère local de Cartan, au super-espace. Les dérivées covariantes (2.14) s'écrivent donc :

$$D_A = E_A^M \partial_M \text{ avec } E_A^M = \begin{pmatrix} \delta_a^m & 0 & 0 \\ i(\bar{\theta} \bar{\sigma}^m \epsilon)^\alpha & \delta_\alpha^\mu & 0 \\ i(\theta \sigma^m \epsilon)^{\dot{\alpha}} & 0 & \delta_{\dot{\mu}}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

où les ∂_M constituent la base du super-espace ; les D_A , la base covariante, et E_A^M est l'inverse de E_M^A avec la relation de dualité : $E_M^A E_A^N = \delta_M^N$.

L'algèbre de supersymétrie est \mathbb{Z}_2 -graduée, donc nous utilisons le commutateur gradué :

$$(D_C, D_B) = D_C D_B - (-1)^{cb} D_B D_C, \quad (3.4)$$

De manière générale, cette équation peut être réécrite géométriquement, en exprimant le commutateur en fonction de la torsion et de la courbure qui sont des objets directement liés à la géométrie de l'espace. Connaissant les règles de commutation pour D_A ((2.15) et (2.16)), il est évident que nous travaillons dans un espace plat, cependant la supersymétrie introduit une torsion :

$$(D_C, D_B) = -T_{CB}^A D_A, \quad (3.5)$$

avec

$$T_\gamma^{\beta a} = -2i (\sigma^a \epsilon)_\gamma^{\dot{\beta}}, \quad (3.6)$$

le seul élément non nul (2.16) de la torsion.

Le produit extérieur est défini par :

$$dz^M dz^N = -(-1)^{mn} dz^N dz^M. \quad (3.7)$$

Avec ces définitions, le superchamp $\mathcal{F}(z)$ apparaît comme une forme différentielle de degré 0. Quelques formes sont présentées dans le tableau suivant, afin d'appréhender les nouveaux objets auxquels nous serons confrontés :

Objet	Type de forme
\mathcal{F}	0-forme
$A = dz^M A_M$	1-forme
$F = \frac{1}{2} dz^M dz^N F_{NM}$	2-forme
$\Omega^{(p)} = \frac{1}{p!} dz^{M_1} \dots dz^{M_p} \Omega_{M_p \dots M_1}$	p-forme

Pour se familiariser avec les formes, rien de tel que d'effectuer quelques calculs élémentaire. Soient A et B des 1-formes, il est possible de vérifier que :

$$AB = -BA, \quad (3.8)$$

ce qui implique :

$$AA = 0. \quad (3.9)$$

D'une manière générale, nous pouvons écrire¹ :

$$\Omega^{(p)}\Omega^{(q)} = (-1)^{pq} \Omega^{(q)}\Omega^{(p)}. \quad (3.10)$$

Remarque : nous pouvons exprimer les p-formes dans la base covariante.

Exemples :

$$A = E^A A_A, \quad (3.11)$$

$$F = \frac{1}{2} E^A E^B F_{BA}. \quad (3.12)$$

3.2 Opérations de dérivation

Dérivée extérieure

Parfois nommée dérivée de de Rahm, nous commençons par présenter cette opération sur des exemples :

$$d\mathcal{F} = dz^M \partial_M \mathcal{F}, \quad (3.13)$$

$$dA = dz^M dz^N \partial_N A_M, \quad (3.14)$$

$$dF = \frac{1}{2} dz^M dz^N dz^K \partial_K F_{NM}. \quad (3.15)$$

Ainsi, pour une p-forme, nous avons :

$$d \left(\frac{1}{p!} dz^M \dots dz^N \Omega_{N\dots M} \right) = \frac{1}{p!} dz^M \dots dz^N dz^L \partial_L \Omega_{N\dots M}. \quad (3.16)$$

Dans ces conditions, il est évident que cette opération de dérivation change le degré des formes auxquelles elle est appliquée,

$$d : p\text{-forme} \rightarrow (p+1)\text{-forme}.$$

Par définition, l'opérateur d est nilpotent, *i.e.* :

$$d^2 = 0, \quad (3.17)$$

et il obéit à la règle de Leibniz :

$$d(\Omega^{(p)}\Omega^{(q)}) = \Omega^{(p)}d\Omega^{(q)} + (-1)^q d\Omega^{(p)}\Omega^{(q)}. \quad (3.18)$$

Il sera nécessaire de connaître la dérivée extérieure du vielbein :

$$dE^A = dz^M dz^N \partial_N E_M^A. \quad (3.19)$$

¹Attention, ici p et q sont les degrés des formes. Nous avons alors une algèbre \mathbb{N} -graduée pour les formes.

En utilisant les définitions (3.3) et (3.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned} dE^A &= \frac{1}{2} E^B E^C T_{CB}^A, \\ &= T^A. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dans la base covariante, le champ de force, $F = dA$, devient :

$$\begin{aligned} F &= d(E^A A_A) \\ &= T^A A_A + E^A E^B D_B A_A \\ &= \frac{1}{2} E^A E^B \left(T_{BA}^C A_C + D_B A_A - (-)^{ab} D_A A_B \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

d'où :

$$F_{BA} = T_{BA}^C A_C + D_B A_A - (-)^{ab} D_A A_B. \quad (3.22)$$

Produit intérieur

C'est le produit d'un champ de vecteurs :

$$\xi = \xi^M \partial_M \quad (3.23)$$

avec une forme différentielle. Par définition, ce produit s'écrit :

$$i_\xi dz^M = \xi^M. \quad (3.24)$$

De même que pour la dérivée extérieure, cette opération change le degré des formes,

$$i_\xi : p\text{-forme} \rightarrow (p-1)\text{-forme},$$

c'est pourquoi il est fait mention d'antidérivation de degré (-1) pour qualifier cette opération.

Quelques exemples :

Soit \mathcal{F} une 0-forme : $i_\xi \mathcal{F} = 0$ (par définition).

Soit A une 1-forme : $i_\xi A = \xi^M A_M$: 0-forme.

Soit F une 2-forme : $i_\xi F = dz^M \xi^N F_{NM}$: 1-forme.

Soit $\Omega^{(p)}$ une p -forme : $i_\xi \Omega = \frac{1}{(p-1)!} dz^{M_1} \dots dz^{M_{p-1}} \xi^{M_p} \Omega_{M_p \dots M_1}$: $(p-1)$ -forme.

Quelques propriétés :

Nilpotence : $i_\xi i_\xi F = \xi^M \xi^N F_{NM} = 0$, à cause des symétries de $\xi^M \xi^N$ et F_{NM} .

Règle de Leibniz pour la dérivée intérieure :

$$i_\xi (\Omega^{(p)} \Omega^{(q)}) = \Omega^{(p)} i_\xi \Omega^{(q)} + (-1)^q i_\xi \Omega^{(p)} \Omega^{(q)}. \quad (3.25)$$

3.3 Dérivée de Lie

Nous avons construit des opérations de dérivation (intérieure et extérieure) qui changent le degré des formes différentielles. À présent, nous voulons construire une opération similaire, mais conservant le degré de la forme à laquelle elle est appliquée. Il est commode de remarquer qu'en combinant judicieusement les différents types de dérivations définis auparavant, nous pourrions réaliser une opération possédant cette propriété. Comme précédemment, nous commencerons par travailler sur des exemples. Soit A , une 1-forme, nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} i_\xi dA &= dz^M \xi^N (\partial_N A_M - \partial_M A_N), \\ di_\xi A &= dz^M (\partial_M \xi^N A_N + \xi^N \partial_M A_N). \end{aligned} \quad (3.26)$$

La dérivée de Lie sera alors définie par :

$$L_\xi A = (i_\xi d + di_\xi) A = dz^M (\xi^N \partial_N A_M + \partial_M \xi^N A_M). \quad (3.27)$$

Pour un élément différentiel, nous avons :

$$L_\xi dz^M = d\xi^M, \quad (3.28)$$

dont découle la règle de Leibniz :

$$L_\xi (AB) = (L_\xi A) B + A (L_\xi B). \quad (3.29)$$

La dérivée de Lie est ainsi une dérivée au sens usuelle. Elle ne change pas le degré de la forme sur laquelle elle est appliquée. D'autre part il n'y a pas de signe dû à la \mathbb{N} -gradation dans l'espace des forme qui apparaissent dans la règle de Leibniz². La différenciation de A par le champ de vecteur ξ , qui n'est autre que le paramètre infinitésimal d'une transformation de coordonnées générales sur le super-espace, nous donne :

$$\delta_\xi A_M = \xi^N \partial_N A_M + (\partial_M \xi^N) A_N. \quad (3.30)$$

Cette dernière relation nous permet d'établir le résultat important suivant :

$$L_\xi A = dz^M \delta_\xi A_M = \delta_\xi A. \quad (3.31)$$

Il est aisé de démontrer la propriété :

$$[L_\eta, L_\xi] A = L_{[\eta, \xi]} A \text{ avec } [\eta, \xi] = \varphi \text{ et } \varphi^K = \eta^L \partial_L \xi^K - \xi^L \partial_L \eta^K \quad (3.32)$$

Ce qui peut se généraliser aisément pour les p-formes [13].

3.4 Transformation de supersymétrie

Dans ce formalisme, la transformation de supersymétrie apparaît comme une dérivation de Lie par rapport à un champ de vecteur défini par :

$$\xi^M = (-i (\xi \sigma^m \bar{\theta} + \bar{\xi} \bar{\sigma}^m \theta), \xi^\mu, \bar{\xi}_{\dot{\mu}}), \quad (3.33)$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\delta_\xi \mathcal{F} = L_\xi \mathcal{F} = \xi^M \partial_M \mathcal{F} = (\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}) \mathcal{F}. \quad (3.34)$$

À partir de l'équation (2.6), nous remarquons qu'une telle transformation correspond à une translation dans le super-espace. Ayant défini cette propriété pour une 0-forme, la notion de transformation de supersymétrie sera étendue pour les p-formes grâce à la notion de dérivée de Lie.

Une autre utilité de cette définition des transformation de supersymétrie (3.34) est la possibilité de travailler dans la base covariante :

$$\delta_\xi \mathcal{F} = \xi^A D_A \mathcal{F}, \quad (3.35)$$

²dans les autres cas, la dérivation est qualifiée de graduée, mais graduée au sens des formes et non \mathbb{Z} -graduée au sens de l'algèbre de supersymétrie

avec :

$$\xi^A = \xi^M E_M^A, \quad (3.36)$$

$$= (-2i (\xi \sigma^a \bar{\theta} + \bar{\xi} \bar{\sigma}^a \theta), \xi^\alpha, \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}). \quad (3.37)$$

Alors, une transformation de supersymétrie se décompose en une translation d'un paramètre ξ^a dans la partie espace du super-espace et d'une transformation, appelée super-translation :

$$\delta_\xi \mathcal{F} = \left(\xi^a \partial_a + \xi^\alpha D_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} \right) \mathcal{F}, \quad (3.38)$$

ainsi :

$$\delta_{ST} \mathcal{F} = \left(\xi^\alpha D_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} \right) \mathcal{F}. \quad (3.39)$$

Il est important de noter que lorsque nous travaillons à $\theta = \bar{\theta} = 0$ ³, alors $\delta_\xi \mathcal{F} = \delta_{ST} \mathcal{F}$. Cette caractéristique simplifiera le formalisme, nous permettant de remplacer les développements dans les variables de Grassmann par des applications successives de dérivées covariantes et des projections sur $\theta = \bar{\theta} = 0$, afin d'obtenir les composantes d'un superchamp. Nous reviendrons plus précisément sur ce fait quand nous discuterons de l'extraction des composantes des différents superchamps. Après avoir défini les transformations de supersymétrie en terme de formes différentielles, il sera possible d'écrire la structure de jauge en terme de 1-forme pour le potentiel de jauge A , de 2-formes pour le champ de force covariant : $F = dA$, où ces objets sont bien définis sur le super-espace.

³nous écrivons une barre après le superchamp pour signifier que nous prenons les variables de Grassmann nulles, ce qui correspond à une projection du super-espace sur l'espace-temps.

Chapitre 4

Application du formalisme géométrique aux superchamps chiraux

Dans cette partie, nous allons utiliser le formalisme géométrique afin de définir les composantes ainsi que les transformations de supersymétrie pour des superchamps chiraux. Nous démontrerons l'utilité de cette approche pour construire des lagrangiens supersymétriques.

Sommaire

4.1	Définition des composantes et lagrangien cinétique	25
4.2	Lagrangiens invariants	27
4.3	Lagrangien potentiel et champs auxiliaires	28

4.1 Définition des composantes et lagrangien cinétique

Nous commençons par un rappel des contraintes de chiralités et d'antichiralité :

$$\overline{D}^{\dot{\alpha}}\Phi = 0, \quad (4.1)$$

$$D_{\alpha}\overline{\Phi} = 0. \quad (4.2)$$

La méthode utilisée pour définir les composantes consiste à extraire la composante la plus basse du développement dans les variables de Grassmann (ce qui correspond à prendre $\theta = \overline{\theta} = 0$ du superchamp ainsi obtenu) pour le superchamp Φ et ses dérivées par rapport aux composantes fermioniques. Cette méthode se révèle plus pratique que de faire des développements dans les variables de Grassmann comme précédemment, car nous manipulons directement des relations de commutations ou d'anticommutations issues de l'algèbre. Il est nécessaire de définir les composantes :

$$\Phi| = A, \quad D_{\alpha}\Phi| = \sqrt{2}\chi_{\alpha}, \quad D^2\Phi| = -4F, \quad (4.3)$$

$$\overline{\Phi}| = \overline{A}, \quad \overline{D}^{\dot{\alpha}}\overline{\Phi}| = \sqrt{2}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}, \quad \overline{D}^2\overline{\Phi}| = -4\overline{F}. \quad (4.4)$$

Les transformations de supersymétrie sont, elles, données par l'opération :

$$\delta_{\xi}\Phi = \xi^A D_A \Phi. \quad (4.5)$$

Avec la condition de chiralité et la définition de ξ dans la base covariante (3.37); en remarquant que ξ^a dépend explicitement des variables de Grassmann, nous trouvons :

$$\delta_\xi A = \delta_\xi \Phi| = \xi^\alpha D_\alpha \Phi| \quad (4.6)$$

$$= \sqrt{2} \xi \chi. \quad (4.7)$$

Afin de continuer le raisonnement pour le terme suivant, il faut prendre la dérivée spinorielle de $\delta_\xi \Phi$, de manière à avoir accès à la transformation du champ χ :

$$\delta_\xi \chi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_\xi D_\alpha \Phi| \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi^\beta D_\beta D_\alpha \Phi| + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \left\{ D_\alpha, \bar{D}^{\dot{\alpha}} \right\} \Phi| \right), \quad (4.9)$$

Finalement, nous obtenons :

$$\delta_\xi \chi_\alpha = \sqrt{2} \left(\xi_\alpha F + i\sqrt{2} (\sigma^m \bar{\xi})_\alpha \partial_m A \right). \quad (4.10)$$

Nous réalisons la même opération pour le champ auxiliaire F :

$$\delta_\xi F = -\frac{1}{4} \delta_\xi D^2 \Phi| \quad (4.11)$$

$$= -\frac{\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}}{4} \left(\left\{ D^\alpha, \bar{D}^{\dot{\alpha}} \right\} D_\alpha \Phi| - D^\alpha \left\{ D_\alpha, \bar{D}^{\dot{\alpha}} \right\} \Phi| \right) \quad (4.12)$$

$$= -\frac{\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}}{4} \left(2 \left\{ D^\alpha, \bar{D}^{\dot{\alpha}} \right\} D_\alpha \Phi| - 2i (\sigma^m \epsilon)_\alpha{}^{\dot{\alpha}} \partial_m D^\alpha \Phi| \right). \quad (4.13)$$

En utilisant les relations de commutations (2.16) , l'équation précédente devient :

$$\delta_\xi F = i\sqrt{2} \bar{\xi} \bar{\sigma}^m \partial_m \chi. \quad (4.14)$$

Les manipulations algébriques sont similaires pour le superchamp conjugué.

Le lagrangien cinétique s'écrira :

$$16 \times \mathcal{L}_{\Phi\bar{\Phi}} = \bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} (\Phi\bar{\Phi}) \equiv [\Phi\bar{\Phi}]_D. \quad (4.15)$$

En utilisant la définition des composantes du superchamp Φ et de son complexe conjugué, la construction du lagrangien supersymétrique en composantes se fera grâce à l'application successive des opérateurs de dérivations supersymétriques covariants. Cette méthode nous permet de trouver :

$$\mathcal{L}_{\Phi\bar{\Phi}} = F\bar{F} - \partial_m A \partial^m \bar{A} - \frac{i}{2} (\bar{\chi} \sigma \partial_m \chi + \chi \sigma \partial_m \bar{\chi}). \quad (4.16)$$

Le résultat précédent est similaire à ce que nous permettait de trouver la méthode de la multiplication des superchamps (11.5). Par conséquent, nous avons un lagrangien supersymétrique décrivant un champ scalaire complexe et un spineur de Weyl. Ce type de lagrangien sera utilisé dans le MSSM pour décrire les termes cinétiques des champs de matière.

4.2 Lagrangiens invariants

Nous avons déjà remarqué que le F-terme d'un superchamp chiral se transformait comme une dérivée totale. Il est alors possible d'écrire un lagrangien du type :

$$\mathcal{L}_F = D^2\Phi + h.c. \text{ avec } \bar{D}^{\dot{\alpha}}\Phi = 0. \quad (4.17)$$

La variation de ce lagrangien sous transformation de supersymétrie sera alors de la forme :

$$\delta\mathcal{L}_F = \partial_m X^m, \quad (4.18)$$

où

$$X^m = i\sqrt{2} \bar{\xi} \bar{\sigma}^m \chi. \quad (4.19)$$

Par conséquent la variation de l'action sous transformation de supersymétrie est nulle :

$$\delta \int d^4x \mathcal{L} = 0, \quad (4.20)$$

prouvant que le lagrangien ainsi construit est supersymétrique.

En fait, nous venons d'examiner le prototype de toute construction de lagrangien supersymétrique. Il a été noté aussi la possibilité de construire un lagrangien supersymétrique en prenant le D-terme d'un superchamp réel. Or, nous avons constaté que la contrainte de chiralité offrait la possibilité d'exprimer tout champ chiral en fonction d'un prépotentiel (11.1). Par conséquent, le lagrangien (4.17) peut être réécrit comme :

$$\mathcal{L}_D = D^2\bar{D}^2V + h.c. \quad (4.21)$$

Il y a donc une correspondance entre les deux types de construction de lagrangien. D'autre part, l'égalité suivante se révèle riche d'enseignements :

$$D^2\bar{D}^2V + h.c. = \left\{ D^2, \bar{D}^2 \right\} \text{Re}(V) + i \left[D^2, \bar{D}^2 \right] \text{Im}(V). \quad (4.22)$$

Ainsi, prendre V complexe semble inutile puisque d'après l'annexe (A.48), la partie imaginaire du lagrangien (4.21) ne contribuera que comme une dérivée totale. Une autre remarque importante provient de l'égalité :

$$D^\alpha \bar{D} D_\alpha = \bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} = \frac{1}{2} \left\{ D^2, \bar{D}^2 \right\} - 8\partial^m \partial_m, \quad (4.23)$$

qui nous permettra selon les cas de calculer des lagrangiens avec plus ou moins de rapidité suivant l'ordre dans lequel les dérivées seront placées.

Enfin, les principales différences entre ces deux types de construction résident dans les invariances possibles des lagrangiens. Par exemple, dans le cas d'une F-densité pour des champs chiraux, la D-densité associée grâce au prépotentiel V est soumise à l'invariance : $V \rightarrow V + \Sigma$ avec Σ un superchamp linéaire défini par $\bar{D}^2\Sigma = 0$. Alors que si nous travaillons directement avec une D-densité, nous aurons juste l'invariance : $V \rightarrow V + F + \bar{F}$ où F (resp. \bar{F}) est (anti)chiral.

L'invariance de ces lagrangiens sous ces transformations a de multiples conséquences (par exemple, en ce qui concerne la renormalisation [63] et le couplage à la supergravité). Cependant, ce n'est pas le sujet traité dans cette thèse.

4.3 Lagrangien potentiel et champs auxiliaires

Pour trouver une application à la construction de lagrangien avec une F-densité, il est utile de remarquer que le produit de deux superchamps chiraux Φ_1 et Φ_2 est aussi un superchamp chirale :

$$\overline{D}^{\dot{\alpha}}(\Phi_1\Phi_2) = 0. \quad (4.24)$$

Cette propriété s'étend naturellement à un produit d'un nombre quelconque de superchamps chiraux. Ainsi, n'importe quelle fonction analytique $W(\Phi)$ de superchamps chiraux Φ_i sera elle-même chirale :

$$\overline{D}^{\dot{\alpha}}W(\Phi) = \sum W_i \overline{D}^{\dot{\alpha}}\Phi_i \quad (4.25)$$

$$= 0, \quad (4.26)$$

en dénotant :

$$W_i = \frac{\partial W}{\partial \Phi_i}. \quad (4.27)$$

Ainsi, nous obtenons une autre classe de lagrangiens en prenant le F -terme de $W(\Phi)$, une fonction analytique en Φ_i quelconque :

$$D^2W(\Phi) = W_{ij}D^\alpha\Phi_j D_\alpha\Phi_i + W_i D^2\Phi_i, \quad (4.28)$$

en ajoutant son hermitien conjugué, nous parvenons à l'expression suivante :

$$\mathcal{L}_{pot} = -\frac{1}{4} \left(D^2W(\Phi) + \overline{D}^2\overline{W}(\overline{\Phi}) \right) \equiv -\frac{1}{4} ([W(\Phi)]_F + [\overline{W}(\overline{\Phi})]_{\overline{F}}) \quad (4.29)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}W_{ij}(A)\chi_j\chi_i + W_i(A)F_i + h.c. \right). \quad (4.30)$$

Si partie cinétique (11.6) et partie potentielle (4.30) sont à présent regroupées, nous observons que le champ F ne possède toujours pas de dynamique, d'où son nom de champ auxiliaire :

$$\frac{\delta}{\delta F} \int d^4x \mathcal{L} \equiv \delta_F \mathcal{L} \Rightarrow \overline{F} = -W_A(A), \quad (4.31)$$

$$\frac{\delta}{\delta \overline{F}} \int d^4x \mathcal{L} \equiv \delta_{\overline{F}} \mathcal{L} \Rightarrow F = -\overline{W}_{\overline{A}}(\overline{A}). \quad (4.32)$$

Au niveau quantique, les équations du mouvement ne peuvent évidemment pas être utilisées pour éliminer ce champ auxiliaire. Nous pouvons cependant procéder à une redéfinition de celui-ci de manière à le faire découpler du reste (on parle souvent de manière abusive de diagonalisation). Ainsi, la partie contenant des champs F ou leurs complexes conjugués dans le lagrangien total s'écrit :

$$F\overline{F} + W_A F + \overline{W}_{\overline{A}} \overline{F} = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} - V_{eff}, \quad (4.33)$$

où la redéfinition suivante a été réalisée :

$$\mathcal{F} = F + \overline{W}_{\overline{A}}. \quad (4.34)$$

En outre, le potentiel effectif pour les champs scalaires V_{eff} est défini par :

$$V_{eff} = |W_A|^2. \quad (4.35)$$

La fonction analytique W est appelée superpotentiel, puisqu'une fois les champs auxiliaires éliminés, cette fonction nous donnera un potentiel pour les scalaires mais aussi des termes de couplage pour les fermions, de type Yukawa. Ce sont ces termes qui communiqueront des masses aux fermions dans le MSSM par le mécanisme de Higgs.

Chapitre 5

Structure de jauge dans le formalisme géométrique

À présent, nous allons utiliser la technologie développée dans le chapitre 3 pour comprendre la structure de jauge d'une théorie supersymétrique du point de vue géométrique. Nous allons surtout nous concentrer sur des groupes unitaires, en particulier tout ce qui suit est fait pour le groupe abélien : $U(1) = \{e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}\}$.

Sommaire

5.1	Structure de jauge	29
5.2	Superchamps covariant chiraux	30
5.3	Solution des contraintes	33
5.4	Composantes et transformations de supersymétrie	35
5.5	Lagrangien invariant de jauge	37

5.1 Structure de jauge

En géométrie, le potentiel de jauge A est une 1-forme sur le super-espace avec la transformation de jauge suivante :

$$A \mapsto A + d\alpha \text{ avec } \alpha \text{ un superchamp réel.} \quad (5.1)$$

Ainsi des superchamps complexes conjugués $\Psi, \bar{\Psi}$, chargés sous cette symétrie, se transforment comme :

$$\Psi \mapsto e^{g\alpha}\Psi, \quad \bar{\Psi} \mapsto e^{-g\alpha}\bar{\Psi} \quad (5.2)$$

Comme pour une théorie de jauge sur l'espace à quatre dimensions, nous sommes obligés d'introduire des dérivées covariantes :

$$D\Psi = (d - gA)\Psi, \quad D\bar{\Psi} = (d + gA)\bar{\Psi} \quad (5.3)$$

Le tenseur de champ $F = dA$ est invariant de jauge grâce à la nilpotence de l'opérateur d . Néanmoins, il est plus commode de travailler dans la base covariante :

$$D\Psi = E^A \mathcal{D}_A \Psi, \quad D\bar{\Psi} = E^A \mathcal{D}_A \bar{\Psi}, \quad (5.4)$$

avec

$$\mathcal{D}_A \Psi = (D_A - gA_A)\Psi, \quad \mathcal{D}_A \bar{\Psi} = (D_A + gA_A)\bar{\Psi}. \quad (5.5)$$

En utilisant les règles du calcul différentiel, nous trouvons les égalités suivantes :

$$DD\Psi = -gF\Psi, \quad DD\bar{\Psi} = +gF\bar{\Psi}, \quad (5.6)$$

qui sont souvent appelée identité de Bianchi du premier type. Ces égalités s'écrivent aussi :

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B) \Psi &= -T_{AB}^C \mathcal{D}_C \Psi - gF_{AB} \Psi, \\ (\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B) \bar{\Psi} &= -T_{AB}^C \mathcal{D}_C \bar{\Psi} + gF_{AB} \bar{\Psi}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Nous constatons alors l'apparition du potentiel de jauge dans les règles de commutation des dérivées, qui peut être identifié comme la courbure de la section du fibré des repères défini par le champ de jauge A .

Il est aussi important de noter la nilpotence du nouvel opérateur de dérivation, ce qui implique l'identité de Bianchi de second type :

$$DF = 0. \quad (5.8)$$

5.2 Superchamps covariant chiraux

Les conditions de chiralité doivent être invariantes de jauge, ce qui s'écrit :

$$\mathcal{D}_\alpha \bar{\Psi} = 0, \quad \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} \Psi = 0. \quad (5.9)$$

De plus, en utilisant la relation (5.7), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\} \bar{\Psi} &= -gF_{\alpha\beta} \bar{\Psi}, \\ \{\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\beta}}\} \Psi &= +gF^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \Psi, \end{aligned} \quad (5.10)$$

ce qui nous donne des conditions sur le tenseur champ de force :

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= 0, \\ F^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ces contraintes sont appelées contraintes conventionnelles.

Nous avons, en outre, la propriété suivante :

$$\left\{ \mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\beta}} \right\} \Psi = -T_\alpha^{\dot{\beta}a} \mathcal{D}_a \Psi - gF_\alpha^{\dot{\beta}} \Psi. \quad (5.12)$$

Il est possible de mettre en évidence que si la contrainte conventionnelle supplémentaire :

$$F_\beta^{\dot{\alpha}} = 0 \quad (5.13)$$

est utilisée ; il y aura alors similarité avec les relations (2.16). Cette contrainte peut être remarquée, à partir de la relation (3.22), qui nous donne :

$$F_\beta^{\dot{\alpha}} = D_\beta A^{\dot{\alpha}} + \bar{D}^{\dot{\alpha}} A_\beta - 2i(\sigma^m \epsilon)_\beta^{\dot{\alpha}} A_m, \quad (5.14)$$

comme une redéfinition de A_m : soit $A_\beta^{\dot{\alpha}} = -2i(\sigma^m \epsilon)_\beta^{\dot{\alpha}} A_m$. Ceci nous donnera par la suite une définition covariante plus simple du superchamp potentiel de jauge¹.

¹Cette contrainte conventionnelle nous affranchira de termes “non physiques” et simplifiera considérablement les équations. Cette simplification permettra de résoudre plus facilement les contraintes sans perte de généralité de notre part.

Par définition, le champ de force est une forme fermée, *i.e.* : $DF = 0$ (dans le cas non supersymétrique, cette équation correspond à la première paire d'équation de Maxwell pour une théorie de jauge abélienne). Si l'espace ordinaire (variété non supersymétrique, simplement connexe) était utilisé, la cohomologie de de Rahm nous apprendrait que grâce à la propriété de nilpotence de l'opérateur d , le tenseur de champ serait automatiquement une forme exacte : $F = dA$. Ceci reste vrai pour une théorie supersymétrique. Toutefois l'étude des identités de Bianchi de second type en composantes, sans utiliser le fait que le tenseur de champ F soit une forme exacte, nous apportera de précieuses informations. Ainsi, il est possible d'écrire explicitement cette identité grâce aux définitions (3.12) et (3.20) :

$$E^A E^B E^C (D_C F_{BA} + T_{CB}^D F_{DA}) = 0 \quad (5.15)$$

$$\oint_{CBA} (D_C F_{BA} + T_{CB}^D F_{DA}) = 0 \quad (5.16)$$

où \oint_{CBA} signifie permutation circulaire sur les indices, en respectant les lois de commutations ou d'anticommutation suivant les indices². Cette dernière équation (5.16), avec les relations (5.11) et (5.13) prises en compte, nous donne :

$$T_\gamma^{\dot{\beta}f} F_{f\alpha} + T_\alpha^{\dot{\beta}f} F_{f\gamma} = 0, \quad (5.17)$$

$$T_\gamma^{\dot{\beta}f} F_f^{\dot{\alpha}} + T_\gamma^{\dot{\alpha}f} F_f^{\dot{\beta}} = 0. \quad (5.18)$$

Remarque si la contrainte conventionnelle (5.13) n'avait pas été utilisée, l'équation (5.17) aurait été remplacée par :

$$D_\gamma F_\alpha^{\dot{\beta}} + D_\alpha F_\gamma^{\dot{\beta}} + T_\gamma^{\dot{\beta}f} F_{f\alpha} + T_\alpha^{\dot{\beta}f} F_{f\gamma} = 0. \quad (5.19)$$

À partir de l'annexe A.1, il est possible de remarquer que nous pouvons passer d'une notation avec des indices spinoriels à une notation avec des indices de Lorentz. Compte tenu de la définition de la torsion (3.6), il est alors correct de réécrire l'équation précédente de la forme :

$$T_\alpha^{\dot{\beta}f} \left(F_{f\gamma} - \frac{i}{2} D_\gamma F_f \right) + T_\gamma^{\dot{\beta}f} \left(F_{f\alpha} - \frac{i}{2} D_\alpha F_f \right) = 0. \quad (5.20)$$

Cette équation est équivalente à l'égalité (5.17) par une redéfinition du champ $F_{f\alpha}$. Or, vue la définition (3.22), cette redéfinition revient à prendre la contrainte conventionnelle. Il est possible de remarquer que ce type de redéfinition peut être réalisé pour chacune des identité de Bianchi, faisant intervenir un terme contenant $F_\alpha^{\dot{\beta}}$. Donc, la contrainte conventionnelle est bien une redéfinition possible du tenseur champ de force qui simplifie les calculs, et non une redéfinition arbitraire.

Une décomposition en éléments irréductibles (A.33) des éléments de la relation (5.17) se révèle avantageuse :

$$T_\gamma^{\dot{\beta}f} F_{f\alpha} \equiv F_{\gamma\alpha}^{\dot{\beta}} \quad (5.21)$$

$$= \epsilon_{\gamma\alpha} F^{\dot{\beta}} + F_{(\gamma}^{\dot{\beta}}{}_{\alpha)}. \quad (5.22)$$

Le premier terme de l'équation précédente correspond à la représentation $(0, \frac{1}{2})$ et le second³ à la représentation $(1, \frac{1}{2})$.

² $\oint_{CBA} CBA = CBA + (-1)^{a(c+b)} ACB + (-1)^{(b+a)c} BAC$

³ Les parenthèses dans le deuxième terme de l'équation (5.22) signifient qu'il y a symétrie dans les indices.

Si cette décomposition (5.22) est injectée dans l'équation (5.17) en utilisant la définition de la torsion (3.6), nous obtenons :

$$F_{a\alpha} = \frac{i}{4} \sigma_a{}_{\alpha\dot{\alpha}} F^{\dot{\alpha}}. \quad (5.23)$$

Par le même raisonnement, nous pouvons montrer que :

$$F_a^{\dot{\beta}} = -\frac{i}{4} \bar{\sigma}_a^{\dot{\beta}\beta} F_{\beta}. \quad (5.24)$$

Les équations (5.23) et (5.24) peuvent être réécrites comme :

$$F_{a\alpha} = +i \sigma_a{}_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}, \quad (5.25)$$

$$F_a^{\dot{\beta}} = -i \bar{\sigma}_a^{\dot{\beta}\beta} W_{\beta}, \quad (5.26)$$

où des facteurs ont été réabsorbés dans la redéfinition de $F_{\alpha a}$ et $F_a^{\dot{\beta}}$ afin de simplifier l'écriture. En étudiant toujours les identités de Bianchi (5.15), il est possible d'extraire les relations suivantes :

$$D_{\gamma} F_{\beta a} + D_{\beta} F_{\gamma a} = 0, \quad (5.27)$$

$$\bar{D}^{\dot{\gamma}} F_a^{\dot{\beta}} + \bar{D}^{\dot{\beta}} F_a^{\dot{\gamma}} = 0, \quad (5.28)$$

qui imposent des conditions de chiralité :

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} W_{\alpha} = 0, \quad D_{\alpha} \bar{W}^{\dot{\alpha}} = 0.$$

Toujours d'après les identités (5.15), nous avons :

$$D_{\gamma} F_a^{\dot{\beta}} + \bar{D}^{\dot{\beta}} F_{\gamma a} + T_{\gamma}{}^{\beta f} F_{f a} = 0.$$

Après calcul, cette dernière relation nous donne :

$$D^{\beta} W_{\beta} = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}},$$

ainsi que :

$$F_{ba} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{ba})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\beta}} - \frac{1}{2} (\sigma_{ba})_{\beta}{}^{\alpha} D_{\alpha} W^{\beta},$$

ayant utilisé les propriétés d'antisymétrie du tenseur F_{ba} .

Finalement, il est aisé de vérifier que les autres identités issues de l'équation (5.15) sont satisfaites par les informations déjà obtenues sur F_{AB} . Donc, ce tenseur est entièrement déterminé lorsque le superchamp W_{α} est connu.

Nous avons ainsi mis en évidence l'existence d'un champ W_{α} , ayant les mêmes propriétés que dans la partie 2.4 à l'aide des identités de Bianchi. Maintenant, en résolvant les contraintes, nous retrouverons le superchamp réel V de la partie précédente, ainsi que son lien avec W_{α} .

5.3 Solution des contraintes

Les contraintes à résoudre, s'écrivent en fonction du potentiel de jauge :

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= D_\alpha A_\beta + D_\beta A_\alpha = 0, \\ F^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= \overline{D}^{\dot{\alpha}} A^{\dot{\beta}} + \overline{D}^{\dot{\beta}} A^{\dot{\alpha}} = 0, \end{aligned}$$

dont les solutions sont :

$$A_\alpha = D_\alpha X, \quad A^{\dot{\alpha}} = \overline{D}^{\dot{\alpha}} \overline{X}. \quad (5.29)$$

Il est possible de noter que X et \overline{X} sont des superchamps conjugués l'un de l'autre à cause des propriétés d'hermiticité de la 1-forme A . De plus, les équation (5.29) impliquent que ces mêmes superchamps sont définis à un champ chiral près.

Les superchamps X et \overline{X} , doivent restituer les transformations de jauge pour A (5.1), ce qui implique les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} X &\mapsto X + \alpha - 2i\overline{\Lambda}, \\ \overline{X} &\mapsto \overline{X} + \alpha - 2i\Lambda, \end{aligned} \quad (5.30)$$

où Λ et $\overline{\Lambda}$ sont des superchamps chiraux (mais pas covariants). Les superchamps X et \overline{X} sont appelés prépotentiels. Il est commode de définir les combinaisons :

$$X_+ = \frac{1}{2} (X + \overline{X}) \text{ avec transformation de jauge : } X_+ \mapsto X_+ + \alpha - i(\Lambda + \overline{\Lambda}), \quad (5.31)$$

$$2V = i(X - \overline{X}) \text{ avec transformation de jauge : } V \mapsto V + i(\Lambda - \overline{\Lambda}). \quad (5.32)$$

Nous reconnaissons ainsi le superchamp V (2.38). En définissant :

$$\Phi = e^{g\overline{X}}\Psi, \quad \overline{\Phi} = e^{-gX}\overline{\Psi},$$

nous retrouvons les propriétés des transformations de jauge usuelles (2.60). Il est important de noter que les transformations de jauge sur A et sur V sont décorréliées. Ce sont deux degrés de liberté indépendants l'un de l'autre. Si le paramètre de jauge α est fixé, nous conservons cependant une invariance sur V . Et réciproquement, si le superchamp $i(\Lambda - \overline{\Lambda})$ est fixé, le paramètre α demeure libre. Ce fait est très important pour la suite, car il faudra toujours faire attention lorsque nous parlerons de transformation de jauge.

Le produit invariant de jauge est alors :

$$\overline{\Psi}\Psi = \overline{\Phi}e^{2gV}\Phi. \quad (5.33)$$

La théorie de jauge de la partie précédente a donc été retrouvée en utilisant le langage géométrique. Désormais, nous nous attachons à établir le lien entre W_α et V . Pour cela, l'équation (5.14) et la contrainte conventionnelle (5.13) sont utilisées, ce qui nous donne :

$$A_m = -\frac{i}{2}\overline{\sigma}_m^{\dot{\beta}\beta} (D_\beta A_{\dot{\beta}} + \overline{D}_{\dot{\beta}} A_\beta). \quad (5.34)$$

Il peut être noté que le champ de jauge "physique" est formé à partir des superchamps X et \overline{X} ; eux mêmes provenant de la partie spinorielle de la 1-forme A .

En utilisant les solutions des contraintes (5.29), nous obtenons :

$$A_m = -\frac{i}{2}\overline{\sigma}_m^{\dot{\beta}\beta} (D_\beta \overline{D}_{\dot{\beta}} \overline{X} + \overline{D}_{\dot{\beta}} D_\beta X).$$

À partir des définitions (5.31) et (5.32), nous avons :

$$\begin{aligned} X &= X_+ - iV, \\ \bar{X} &= X_+ + iV, \end{aligned}$$

nous permettant d'obtenir :

$$A_m = \partial_m X_+ + \frac{1}{4} \bar{\sigma}_m^{\dot{\beta}\beta} [D_\beta, \bar{D}_{\dot{\beta}}] V. \quad (5.35)$$

Il est alors possible de remarquer, que si nous posons :

$$\mathcal{V}_m = \frac{1}{4} \bar{\sigma}_m^{\dot{\beta}\beta} [D_\beta, \bar{D}_{\dot{\beta}}] V,$$

alors nous avons l'égalité suivante :

$$\mathcal{V}_m = A_m - \partial_m X_+.$$

Les transformation de jauge sur le champ A_m ainsi que sur X_+ , nous donnent :

$$\mathcal{V}_m \rightarrow \mathcal{V}_m + \partial_m (\Lambda + \bar{\Lambda}).$$

Autrement dit, il est possible d'identifier la composante en $\theta = \bar{\theta} = 0$ de ce superchamp avec le champ V_m défini en (2.38). Nous avons donc la même loi de transformation que celle exhibée par la relation (2.61).

En résumé les contraintes (5.9) et (5.13) permettent d'exprimer les composantes de la connexion en fonction du superchamp V et d'une partie pure jauge, X_+ :

$$\begin{aligned} A_\alpha &= D_\alpha X_+ - iD_\alpha V, \\ A^{\dot{\alpha}} &= \bar{D}^{\dot{\alpha}} X_+ + i\bar{D}^{\dot{\alpha}} V, \\ A_m &= \partial_m X_+ + \frac{1}{4} \bar{\sigma}_m^{\dot{\beta}\beta} [D_\beta, \bar{D}_{\dot{\beta}}] V. \end{aligned}$$

D'autre part, en réexprimant les identités suivantes :

$$F_{\beta a} = D_\beta A_a - \partial_a A_\beta, \quad F_a^{\dot{\beta}} = \bar{D}^{\dot{\beta}} A_a - \partial_a A^{\dot{\beta}}, \quad (5.36)$$

en fonction de W_α , $\bar{W}^{\dot{\alpha}}$ et V , nous obtenons :

$$W_\alpha = \frac{1}{4} \bar{D}^2 D_\alpha V, \quad \bar{W}^{\dot{\alpha}} = \frac{1}{4} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} V. \quad (5.37)$$

Ainsi, les superchamps W_α , $\bar{W}^{\dot{\alpha}}$ et V ont été obtenus en partant de l'aspect géométrique de la supersymétrie.

Il est aussi intéressant de noter, que le terme pure jauge X_+ peut être réabsorbé, en se plaçant dans une jauge judicieusement choisie :

$$\alpha = -X_+. \quad (5.38)$$

Une fois dans cette jauge, nous avons les relations suivantes :

$$A_\alpha = -iD_\alpha V, \quad (5.39)$$

$$A^{\dot{\alpha}} = +i\bar{D}^{\dot{\alpha}} V, \quad (5.40)$$

et donc :

$$\begin{aligned} W_\alpha &= +\frac{i}{4} \bar{D}^2 A_\alpha, \\ \bar{W}^{\dot{\alpha}} &= -\frac{i}{4} D^2 A^{\dot{\alpha}}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

ce qui nous donne des renseignements sur la composition en champs "physiques" de la connexion A . Nous avons déjà remarqué dans la section 2.4, que les champs physiques du secteur de jauge étaient contenus dans les superchamps spinoriels W_α et $\bar{W}^{\dot{\alpha}}$.

5.4 Composantes des superchamps et transformations de supersymétrie

Muni des nouvelles dérivées covariantes (5.5), il est possible de redéfinir les composantes du superchamp chiral (section 2.2). Pour cela, il suffit de remplacer les dérivées covariantes de supersymétrie (2.14) par des dérivées covariantes par rapport aux transformations de supersymétrie mais aussi de jauge (5.5) :

$$D_A \rightarrow \mathcal{D}_A = D_A - gA_A, \quad (5.42)$$

dans les définitions (11.3) et (11.4), ce qui détermine la nouvelle caractérisation des composantes :

$$\Psi| = A, \quad \mathcal{D}_\alpha \Psi| = \sqrt{2}\chi_\alpha, \quad \mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}_\alpha \Psi| = -4F, \quad (5.43)$$

$$\bar{\Psi}| = \bar{A}, \quad \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} \bar{\Psi}| = \sqrt{2}\chi^{\dot{\alpha}}, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} \bar{\Psi}| = -4\bar{F}. \quad (5.44)$$

Les champs définis ainsi ne sont plus les mêmes que précédemment (11.3-11.4), mais une combinaison de ceux-ci avec les champs de jauge. Pour le secteur de jauge, il est évident de prendre :

$$A_m| = ia_m, \quad W_\alpha| = -i\lambda_\alpha, \quad \bar{W}^{\dot{\alpha}}| = i\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}, \quad \mathcal{D}^\alpha W_\alpha| = -2D.$$

Nous allons, à présent, nous intéresser aux transformations de supersymétrie. Il est important de noter l'effet conjoint d'une transformation de supersymétrie et d'une transformation de jauge sur les différents superchamps :

$$\begin{aligned} \delta\Psi &= i_\xi d\Psi + g\alpha\Psi = i_\xi D\Psi + g(\alpha + i_\xi A)\Psi, \\ \delta\bar{\Psi} &= i_\xi d\bar{\Psi} - g\alpha\bar{\Psi} = i_\xi D\bar{\Psi} - g(\alpha + i_\xi A)\bar{\Psi}, \\ \delta A &= L_\xi A + d\alpha = i_\xi F + d(\alpha + i_\xi A). \end{aligned}$$

La transformation de Wess-Zumino, est définie comme une combinaison d'une transformation infinitésimale de supersymétrie et d'une transformation de jauge de paramètre :

$$\alpha = -i_\xi A, \quad (5.45)$$

dépendant explicitement du superchamp vectoriel ξ^M . Nous obtenons ainsi les relations suivantes :

$$\delta_{WZ}\Psi = i_\xi D\Psi, \quad \delta_{WZ}\bar{\Psi} = i_\xi D\bar{\Psi}, \quad \delta_{WZ}A = i_\xi F.$$

Il est essentiel de noter que les transformations ainsi construites n'utilisent que des opérateurs covariants (par rapport aux transformations de supersymétrie et de jauge). Il est aussi instructif de noter, que le superchamp réel α est exprimé comme la décomposition suivant une base définie par le superchamp vectoriel ξ^A , de la connexion A .

Pour le superchamp chiral, nous avons :

$$\delta_{WZ}\Psi = \xi^A \mathcal{D}_A \Psi.$$

Avec la condition de chiralité et la définition de ξ dans la base covariante (3.37), la composante la plus basse du superchamp chiral Ψ se transforme comme :

$$\begin{aligned} \delta_{WZ}A &= \delta_{WZ}\Psi| = \xi^\alpha \mathcal{D}_\alpha \Psi|, \\ &= \sqrt{2}\xi\chi. \end{aligned}$$

Si nous poursuivons le raisonnement pour le champ χ_α , la transformation de supersymétrie de ce champ est donnée par :

$$\delta_{WZ}\chi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{WZ}\mathcal{D}_\alpha\Psi|,$$

ce qui nous redonne bien la transformation de supersymétrie obtenue par l'équation (2.28), mais avec une dérivée spatiale covariante :

$$\delta_{WZ}\chi_\alpha = \sqrt{2}\xi_\alpha F + i\sqrt{2}(\sigma^m\bar{\xi})_\alpha \mathcal{D}_m A.$$

De même :

$$\begin{aligned} \delta_{WZ}F &= -\frac{1}{4} \delta_{WZ}\mathcal{D}^2\Psi|, \\ &= -\frac{\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}}{4} \left(2 \left\{ \mathcal{D}^\alpha, \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} \right\} \mathcal{D}_\alpha\Psi - \left[\mathcal{D}^\alpha, \left\{ \mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} \right\} \right] \Psi \right), \\ &= -\frac{\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}}{4} \left(2 \left\{ \mathcal{D}^\alpha, \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} \right\} \mathcal{D}_\alpha\Psi - 2i(\sigma^m\epsilon)_\alpha{}^{\dot{\alpha}} [\mathcal{D}^\alpha, \mathcal{D}_m] \Psi \right). \end{aligned}$$

En utilisant les relations de commutations (5.7) et la forme du tenseur de champ (5.25), nous obtenons :

$$\delta_{WZ}F = i\sqrt{2} \bar{\xi} \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \chi + 2ig\bar{\xi} \bar{\lambda} A.$$

Il est maintenant nécessaire de traiter le multiplet de jauge :

$$\begin{aligned} \delta_{WZ}a_m &= -i \delta_{WZ}A_m|, \\ &= -i \xi^\alpha F_{\alpha m} - i \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} F^{\dot{\alpha}}_m|. \end{aligned}$$

En exploitant les équations (5.25) et (5.26), il est aisé de retrouver :

$$\delta_{WZ}V_m = -i(\xi\sigma_m\bar{\lambda} + \bar{\xi}\bar{\sigma}_m\lambda). \quad (5.46)$$

Pour ce qui est de la partie jaugino, il est important de se souvenir que W_α est un champ chiral :

$$\begin{aligned} -i\delta_{WZ}\lambda_\alpha &= i\xi D W_\alpha|, \\ &= \xi^\beta D_\beta W_\alpha|. \end{aligned}$$

Connaissant le contenu en champ de W_α (2.50), nous parvenons :

$$\delta_{WZ}\lambda_\alpha = i\xi_\alpha D - (\sigma^{mn}\xi)_\alpha f_{mn}, \quad (5.47)$$

où nous avons utilisé la définition :

$$f_{mn} = \partial_m a_n - \partial_n a_m = -iF_{mn}|.$$

De même, le complexe conjugué de λ_α se transforme comme :

$$\delta_{WZ}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} = -i\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} D - (\sigma^{mn}\bar{\xi})^{\dot{\alpha}} f_{mn}. \quad (5.48)$$

Pour le dernier terme du multiplet de jauge, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \delta_{WZ}D &= -\frac{1}{2} \delta_{WZ}D^\alpha W_\alpha|, \\ &= -\frac{1}{2} \left(\xi^\beta D_\beta D^\alpha W_\alpha| + \bar{\xi}_{\dot{\beta}} \left\{ D^\alpha, \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\beta}} \right\} W_\alpha| \right). \end{aligned}$$

Après calcul, nous obtenons :

$$\delta_{WZ} D = \partial_m (\bar{\xi} \bar{\sigma}^m \lambda - \xi \sigma^m \lambda). \quad (5.49)$$

Ainsi, la transformation de Wess-Zumino, nous permet de réaliser directement une transformation de supersymétrie et une transformation de jauge compensatoire dans un cadre géométrique qui simplifie les expressions. Ceci nous permet de toujours travailler dans la jauge de Wess-Zumino, en s'affranchissant aisément des champs non physiques.

5.5 Lagrangien invariant de jauge

Après avoir défini proprement les composantes du superchamp covariant chiral (5.43), ainsi que ses transformations de supersymétrie, il nous est possible de calculer le lagrangien invariant (5.33) :

$$16 \times \mathcal{L} = \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \mathcal{D}^2 \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} \Psi \bar{\Psi}.$$

Pour ce calcul, il est utile de connaître les formules suivantes :

$$[\mathcal{D}_{\alpha}, \bar{\mathcal{D}}^2] \Gamma = -4i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \mathcal{D}_m \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} \Gamma - 8gW_{\alpha} \Gamma, \quad (5.50)$$

$$[\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{D}^2] \Gamma = 4i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \mathcal{D}_m \mathcal{D}^{\alpha} \Gamma + 8g\bar{W}_{\dot{\alpha}} \Gamma, \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}^2, \bar{\mathcal{D}}^2] \Gamma &= -4i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \mathcal{D}_m [\mathcal{D}^{\alpha}, \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}}] \Gamma - 8g(\mathcal{D}^{\alpha} W_{\alpha}) \Gamma \\ &\quad - 16(g-1)W^{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha} \Gamma - 16(g+1)\bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} \Gamma, \end{aligned} \quad (5.52)$$

Par conséquent, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\mathcal{D}_m A \mathcal{D}^m \bar{A} - \frac{i}{2} (\chi \sigma \mathcal{D} \bar{\chi} + \bar{\chi} \bar{\sigma} \mathcal{D} \chi) \\ &\quad + F \bar{F} - i\sqrt{2}g (\bar{\lambda} \bar{\chi} A - \lambda \chi \bar{A}) + g A \bar{A} D. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Ce lagrangien nous donne le couplage champ de jauge/champ de matière. Cependant, il faut lui adjoindre le lagrangien cinétique pour le champ de jauge. Ce dernier s'écrit naturellement :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16} (\mathcal{D}^2 W^2 + \bar{\mathcal{D}}^2 W^2),$$

qui après calcul, nous permet d'écrire en composantes :

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2} (\lambda \sigma \partial \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \bar{\sigma} \partial \lambda) - \frac{1}{4} f^{ba} f_{ba} + \frac{1}{2} D^2. \quad (5.54)$$

Le lagrangien total, sera alors l'addition des lagrangiens (5.53) et (5.54). Comme toujours pour avoir la théorie effective, il faut se débarrasser des champs auxiliaires. Dans ce cas ci, l'équation du mouvement pour F est triviale, il n'y a donc pas besoin de diagonaliser. Par contre, pour le champ auxiliaire D , il nécessaire de définir :

$$\mathbb{D} = D + g A \bar{A}.$$

Ainsi le lagrangien total devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{i}{2} (\lambda \sigma \partial \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \bar{\sigma} \partial \lambda) - \frac{1}{4} f^{ba} f_{ba} - \mathcal{D}_m A \mathcal{D}^m \bar{A} - \frac{i}{2} (\chi \sigma \mathcal{D} \bar{\chi} + \bar{\chi} \bar{\sigma} \mathcal{D} \chi) \\ &\quad - i\sqrt{2}g (\bar{\lambda} \bar{\chi} A - \lambda \chi \bar{A}) + F \bar{F} + \frac{1}{2} \mathbb{D}^2 - V_D(A, \bar{A}), \end{aligned}$$

avec

$$V_D = \frac{1}{2}g^2 (A\overline{A})^2,$$

le potentiel scalaire issu de la diagonalisation du champ auxiliaire D .

Chapitre 6

Brisure de supersymétrie et MSSM

Nous avons remarqué dès l'introduction de l'algèbre (section 1.3) la condition nécessaire à la brisure de supersymétrie (1.11). Dans ce chapitre, nous allons investiguer les différentes manières de réaliser cette condition et la phénoménologie associée à ces différents types de brisure spontanée de supersymétrie. Mais nous évoquerons aussi brisure dite douce de supersymétrie, afin de pouvoir donner une présentation succincte du MSSM.

Sommaire

6.1	Brisure par D-terme	39
6.2	Condition de brisure d'O'Raifeartaigh	40
6.3	Potentiel d'O'Raifeartaigh	42
6.4	Brisure douce	43
6.5	Modèle Standard Supersymétrique Minimal	43

6.1 Brisure par D-terme

Fayet et Iliopoulos [37] ont observé qu'un terme :

$$\mathcal{L}_{FI} = \xi D = -\frac{1}{4}\xi (\mathcal{D}W + \overline{\mathcal{D}W})|,$$

était invariant de supersymétrie et invariant de jauge pour un groupe de jauge de type $U(1)$; où W_α et $\overline{W}^{\dot{\alpha}}$ sont les tenseurs de champ d'une théorie de jauge abélienne et ξ une constante réelle. Ainsi, il n'y a aucune objection possible à l'ajout d'un tel terme dans la théorie¹.

Néanmoins, les équations du mouvement pour le champ auxiliaire, se trouveront modifiées :

$$D = -\left(\xi + \frac{1}{2}\sum_i \gamma_i A_i \overline{A}_i\right),$$

¹Nous remarquerons cependant que ce terme peut briser la symétrie CP. Dans le cas où le vecteur de ce multiplet est polaire et non axial, le champ auxiliaire D devient du même coup un pseudoscalaire, qui n'est pas invariant sous CP.

avec γ_i la charge du superchamp Φ_i . Ainsi, la partie du potentiel scalaire provenant du champ auxiliaire D s'écrit :

$$V_D = \frac{1}{2} \left(\xi + \sum_i \gamma_i A_i \bar{A}_i \right)^2. \quad (6.1)$$

Il est ainsi aisé de remarquer que la présence du paramètre ξ dans le potentiel permet de réaliser une brisure de supersymétrie ou de jauge suivant le signe relatif entre les deux parties du potentiel.

Nous nous concentrons, à présent, sur la brisure de supersymétrie, dont nous présentons le modèle le plus simple développé par Fayet en 1975 [36,37]. Pour cela, on considère un seul champ chiral avec un potentiel donné par :

$$V_D = \frac{1}{2} (\xi + \gamma A \bar{A})^2,$$

dont le terme contenu dans la parenthèse est toujours positif pour ξ et γ définis positifs. Le minimum du potentiel est alors donné pour $A = 0$; avec

$$V_D = \frac{1}{2} \xi^2,$$

soit un minimum du potentiel (ou vide de la théorie) non nul, ce qui constitue une signature de la brisure de supersymétrie. Cette condition s'apparente à la condition sur le vide² (1.11). Comme cela, le champ auxiliaire D acquiert une énergie du vide (ou *vev* pour vacuum expectation value en anglais) non nulle et donc le jaugino associé obtient une loi de transformation inhomogène (2.46). Ce spineur est alors le spineur de Goldstone qui reste sans masse, tout comme les autres champs du multiplet de jauge. À l'inverse, le champ scalaire contenu dans le superchamp de matière reçoit une masse par le potentiel scalaire : $M_A^2 = \xi\gamma$, alors que le fermion associé, reste lui sans masse. Le spectre en masse est alors non supersymétrique pour le champ de matière.

6.2 Condition de brisure de supersymétrie d'O'Raifeartaigh

Dans cette section, nous étudions la brisure de supersymétrie par F-terme. Ainsi, nous débutons avec l'étude du lagrangien de Wess-Zumino généralisé :

$$\mathcal{L}_{WZ} = -\frac{1}{16} \sum_i [\Phi_i \bar{\Phi}_i]_D - \frac{1}{4} ([W(\Phi)]_F + [\bar{W}(\bar{\Phi})]_{\bar{F}}),$$

avec le superpotentiel :

$$W(\Phi) = \lambda_i \Phi_i + m_{ij} \Phi_i \Phi_j + g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k,$$

où m_{ij} et g_{ijk} sont totalement symétriques.

Ainsi, en composantes, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WZ} = & \frac{1}{16} \sum_i \left(F_i \bar{F}_i - \partial^m A_i \partial_m \bar{A}_i - \frac{i}{2} (\chi_i \sigma \partial \bar{\chi}_i + \bar{\chi}_i \bar{\sigma} \partial \chi_i) \right) \\ & + \left(\lambda_i F_i + m_{ij} \left(F_i A_j - \frac{1}{2} \chi_i \chi_j \right) + g_{ijk} \left(F_i A_j A_k + \frac{1}{2} \chi_i \chi_j A_k \right) + h.c. \right). \end{aligned} \quad (6.2)$$

²ceci provient de l'égalité : $\langle 0 | \mathbf{P}^0 | 0 \rangle = \langle 0 | \mathbf{V}_{eff} | 0 \rangle$ qui est valide si les effets dépendant de l'espace-temps ainsi que les condensats de fermions sont négligés.

Comme nous l'avons déjà noté dans la section 4.3, la diagonalisation des champs auxiliaires nous donne l'égalité suivante :

$$V_{eff}(A) = \sum_i |F_i|^2,$$

où :

$$-\bar{F}_i = \lambda_i + m_{ij}A_j + g_{ijk}A_jA_k. \quad (6.3)$$

De cette façon, la condition pour avoir un extremum local du potentiel, en $A_i = 0$, s'écrit [78] :

$$m_{ij}\bar{\lambda}_j = 0, \quad (6.4)$$

et celle pour avoir un minimum local :

$$\frac{1}{2}M_{ij}^2 \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\bar{m}_{ik}m_{kj} & g_{ijk}\bar{\lambda}_k \\ \bar{g}_{ijk}\lambda_k & \frac{1}{2}m_{ik}\bar{m}_{kj} \end{pmatrix} \geq 0,$$

avec M la matrice de masse des scalaires. La matrice de masse des fermions étant m_{ij} , il est évident que la condition pour avoir un spectre supersymétrique est donnée par :

$$g_{ijk}\bar{\lambda}_k = 0. \quad (6.5)$$

Nous nous sommes concentré jusqu'à présent sur la recherche d'un minimum local, alors que ce qui est pertinent est le minimum absolu. Or d'après la définition du potentiel, l'inégalité suivante : $V_{eff} \geq 0$ est automatiquement vérifiée. Ainsi, toute condition qui assure $V_{eff} = 0$, assure un minimum absolu. Cette condition est donc donnée par :

$$F_i = 0. \quad (6.6)$$

Il est important de noter la symétrie du potentiel V_{eff} :

$$V_{eff}(A + z, m, \lambda) = V_{eff}(A, m(z), \lambda(z)),$$

avec :

$$\begin{aligned} m_{ij}(z) &= m_{ij} + 2g_{ijk}z_k, \\ \lambda_i(z) &= \lambda_i + m_{ij}z_j + g_{ijk}z_jz_k. \end{aligned} \quad (6.7)$$

La condition de minimum absolu (6.6), grâce à la relation (6.7) implique un spectre dégénéré entre bosons et fermions (6.5). Par contre la réciproque n'est pas toujours vraie. Ainsi, si $\lambda(z) \neq 0$, alors $F \neq 0$ et nous avons alors un vide non-supersymétrique. Mais si $m_{ij} = 0$ et $g_{ijk} = 0$, le spectre en masse reste dégénéré (6.5). Le champ mis en cause dans ce phénomène découple, d'où son appellation de champ factice. Dans ces conditions, il est donc possible d'avoir un spectre supersymétrique bien que la supersymétrie soit brisée au niveau du vide. Cette remarque se révélera importante pour la dernière partie de cette thèse.

6.3 Potentiel d'O'Raifeartaigh

De nouveau, nous débutons avec un lagrangien de type Wess-Zumino :

$$\mathcal{L}_{WZ} = -\frac{1}{16} \sum_{i=0}^2 [\Phi_i \bar{\Phi}_i]_D - \frac{1}{4} ([W(\Phi)]_F + [\bar{W}(\bar{\Phi})]_{\bar{F}}).$$

Mais, nous travaillons avec un potentiel spécifique : le potentiel d'O'Raifeartaigh, qui est le potentiel minimal pour avoir une brisure de supersymétrie par F-terme :

$$W(\Phi) = \lambda \Phi_0 + m \Phi_1 \Phi_2 + g \Phi_0 \Phi_1^2. \quad (6.8)$$

Étudions à présent, les équations du mouvement pour les champs auxiliaires F_i :

$$\begin{aligned} \bar{F}_0 &= -\lambda - g A_1^2, \\ \bar{F}_1 &= -m A_2 - 2g A_0 A_1, \\ \bar{F}_2 &= -m A_1, \end{aligned}$$

qui nous donnent le potentiel effectif :

$$V_{eff} = |\lambda + g A_1^2|^2 + |m A_2 + 2g A_0 A_1|^2 + |m A_1|^2. \quad (6.9)$$

Dans ce cas précis, il n'y a aucune solution possible avec tout les F_i simultanément nuls. Ainsi, la condition (6.6) n'est pas réalisée et aucun champ ne découple. Nous sommes alors en présence d'une brisure de supersymétrie avec un spectre de masse non supersymétrique.

Si les paramètres vérifient la relation $m^2 > g\lambda$, alors le minimum absolu du potentiel a lieu pour :

$$\langle A_1 \rangle = \langle A_2 \rangle = 0,$$

alors que $\langle A_0 \rangle$ reste indéterminé. À ce minimum absolu, nous avons :

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = 0 \text{ et } \bar{F}_0 = -\lambda.$$

Le minimum du potentiel est donc :

$$V_{eff} = \lambda^2.$$

D'une part, la partie du lagrangien (6.2) donnant la masse aux fermions, s'écrit :

$$\mathcal{L}_M^F = -\frac{1}{2} (m \chi_1 \chi_2 + 2g \langle A_0 \rangle \chi_1 \chi_1) + h.c. \quad (6.10)$$

Il est ainsi possible de remarquer que χ_0 reste sans masse : c'est le fermion de Goldstone associé à la brisure d'un générateur fermionique. D'autre part, le potentiel nous donne le lagrangien de masse pour les bosons :

$$\mathcal{L}_M^B = -m^2 (A_1 \bar{A}_1 + A_2 \bar{A}_2) + 2g\lambda (A_1^2 + \bar{A}_1^2),$$

où il peut être remarqué que le scalaire A_0 est sans masse. Le scalaire A_2 , quant à lui, possède une masse m , alors que le champ scalaire complexe A_1 se décompose en deux scalaires réels possédant des masses distinctes. Ainsi, les champs A_0 et A_2 restent dégénérés en masse avec leurs superpartenaires χ_0 et χ_2 , alors que A_1 acquiert une masse différente de son partenaire supersymétrique à cause de son couplage au superchamp Φ_0 , qui contient le fermion de Goldstone.

6.4 Brisure douce

Dans les parties précédentes, nous avons discuté de la brisure spontanée de supersymétrie. Cependant, si à la version supersymétrique du modèle standard, un terme de type Fayet-Iliopoulos pour le groupe de jauge $U(1)_Y$ est ajouté, les partenaires supersymétriques des bosons de jauge admettront un état de masse nulle, appelé fermion de Goldston ou goldstino. Or la non observation d'une telle particule, implique que ce type de brisure de supersymétrie n'est pas phénoménologiquement viable. De même, pour espérer réaliser un superpotentiel de type O'Raifeartaigh, il faudrait ajouter à la théorie un superchamp singlet pour les symétries du modèle standard. Or, le modèle standard ne possède pas de telle particule.

De manière plus générique, l'étude des théories supersymétriques spontanément brisées par F-termes et/ou D-terme nous fournit la règle de somme suivante après minimisation du potentiel scalaire et élimination des champs auxiliaires :

$$Tr [M_{\text{scalaires réel}}^2] = 2Tr [M_{\text{fermions chiraux}}^2].$$

De cette relation découlent des masses trop faibles pour certains des partenaires supersymétriques associés aux particules du modèle standard. Ainsi, une extension supersymétrique du modèle standard ne peut avoir une brisure spontanée de supersymétrie. Il sera donc crucial de générer une brisure explicite de supersymétrie. Cependant pour ne pas perdre toutes les propriétés de l'algèbre de supersymétrie (en particulier certaines propriétés à haute énergie de la théorie que nous n'avons pas le temps de développer dans cette thèse), il sera nécessaire de travailler avec une brisure douce de supersymétrie. Par douce, il faut comprendre une brisure dont les termes possèdent des couplages avec des dimensions positives (en échelle de masse) pour conserver la hiérarchie adéquate entre l'échelle électrofaible et la masse du boson de Higgs-Englert-Brout d'une part, et l'échelle de Planck d'autre part.

Dans le contexte d'une théorie générale renormalisable, les termes possibles sont données par le lagrangien [55] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{soft} = & -\frac{1}{2} (M_\lambda \lambda \lambda + h.c.) - (m^2)_{ij} A^i \bar{A}^j \\ & - \left(\frac{1}{2} b^{ij} A_i A_j + \frac{1}{6} a^{ijk} A_i A_j A_k + h.c. \right) - \frac{1}{2} (c^{ijk} \bar{A}_i A_j A_k + h.c.). \end{aligned}$$

Ce lagrangien consiste en un terme de masse pour les jauginos (fermions associés aux champs de jauge) et les higgsinos, des termes de masse pour des champs scalaires associés aux fermions $(m^2)_{ij}$ et b_{ij} , des couplages trilineaires pour les scalaires a^{ijk} et c^{ijk} .

6.5 Modèle Standard Supersymétrique Minimal

Dans tout ce qui précède, nous avons montré les ingrédients de base pour construire une théorie supersymétrique. Dans cette section, nous fournirons les éléments pour comprendre la construction du MSSM. En premier lieu, il faut remarquer qu'il faut remplacer les champs du MS par des superchamps. En termes de composantes, le lagrangien de cette théorie est constitué de quatre parties distinctes : matière, jauge, interactions de Yukawa et enfin les termes de brisure douce. Mais avant de présenter le lagrangien, il est nécessaire de présenter les multiplets nécessaires et leurs propriétés sous les différents groupes de symétrie du MS : $U(1)_Y \times SU(2)_L \times SU(3)_C$. Nous commençons avec les multiplets de jauge et leurs charges.

Multiplets de jauge : $(A_m, \lambda, \bar{\lambda} ; D)$

Champ de jauge	B_m	W_m	G_m
Jaugino associé	\tilde{b}	\tilde{w}	\tilde{g}
représentation de $SU(2)_L$	1	3	1
représentation de $SU(3)_C$	1	1	8

Multiplets chiraux (matière) : $\Phi \equiv (A, \chi ; F)$

$\Phi_s, S =$	H_1	H_2	Q	L	E^c	D^c	U^c
hypercharge Y	-1/2	1/2	1/6	-1/2	1	1/3	-2/3
représentation de $SU(2)_L$	2	2	2	2	1	1	1
représentation de $SU(3)_C$	1	1	3	1	1	$\bar{3}$	$\bar{3}$

Avec ces définitions, il est alors possible d'écrire les différentes parties du lagrangien.

Partie matière : elle contient les champs de matière : les fermions ainsi que leurs partenaires supersymétriques, mais aussi les champs de Higgs nécessaires à la brisure de symétrie électrofaible et leurs superpartenaires, les higgsinos :

$$\mathcal{L}_{matière} = \sum_S \mathcal{L}_{\Phi_S \bar{\Phi}_S}$$

où $S = H_1, H_2, Q, L, U^c, D^c, E^c$.

Par conséquent, en composantes, la décomposition suivante peut être obtenue après projection sur l'espace à quatre dimensions :

$$\mathcal{L}_{matière} = \mathcal{L}_{cin}^{mat} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{aux},$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{cin}^{mat} &= - \sum_S \left(\mathcal{D}^m \bar{A}_S \mathcal{D}_m A_S + \frac{i}{2} (\chi_S \sigma \partial \bar{\chi}_S + \bar{\chi}_S \bar{\sigma} \partial \chi_S) \right), \\ \mathcal{L}_{int} &= -i\sqrt{2} \sum_S (\bar{A}_S \lambda \chi_S - \bar{\chi}_S \bar{\lambda} A_S), \\ \mathcal{L}_{aux} &= \sum_S (F_S \bar{F}_S + \bar{A}_S \mathbb{D} A_S), \end{aligned}$$

De plus, il faut prendre des dérivées covariantes par rapport aux groupes de symétrie dont le champ de matière est une représentation. Nous avons adopté les notations suivantes :

$$\lambda^\alpha = g_1 y \tilde{b}^\alpha + g_2 \tilde{w}^\alpha + g_3 \tilde{g}^\alpha, \quad (6.11)$$

$$\mathbb{D} = g_1 D_1 + g_2 D_2 + g_3 D_3. \quad (6.12)$$

Partie jauge : elle contient la partie cinétique des champs de jauge et de leurs partenaires supersymétriques :

$$\mathcal{L}_{jauge} = - \left(D^2 \left(\frac{1}{16g_1^2} W_1^2 + \frac{1}{8g_2^2} tr(W_2^2) + \frac{1}{8g_3^2} tr(W_3^2) \right) + h.c. \right)$$

Chaque partie de ce lagrangien est séparée en trois éléments distincts lors de la projection sur l'espace à quatre dimensions : les termes cinétiques des champs de jauge analogues à ceux du MS, puis les termes cinétiques des jauginos et enfin les termes "cinétiques" des champs auxiliaires.

Partie Yukawa : ce lagrangien reproduit les termes de Yukawa du MS, qui donnent la masse aux fermions, ainsi qu'une contribution à la masse de leurs partenaires supersymétriques (l'autre partie provenant des termes de brisure douce) :

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = \frac{1}{4} (D^2 W(\Phi) + h.c.),$$

avec³

$$W(\Phi) = \mu H_1 \cdot H_2 + y_e L \cdot H_1 E^c + y_d Q \cdot H_1 D^c + y_u Q \cdot H_2 U^c,$$

le superpotentiel le plus général respectant la R-parité [35].

Partie douce : les lagrangiens précédents étaient invariants sous transformation globale de supersymétrie, ce qui constitue l'extension supersymétrique du MS. Cependant, la non-observation de particules supersymétriques, nous oblige à rejeter cette théorie. Pour qu'elle soit viable, il faut lui adjoindre des termes de brisure douce :

$$\mathcal{L}_{soft} = -m_S A_S \bar{A}_S + (\beta_S A_S^3 + m_{jauginos} \lambda^2 - m_3^2 h_1 \cdot h_2 + h.c.).$$

Pour résumer, le MSSM est défini par le lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}_{MSSM} = \mathcal{L}_{MSsupersymétrique} + \mathcal{L}_{soft}.$$

Ayant le lagrangien en composantes, la première tâche à effectuer est la diagonalisation des champs auxiliaires afin de les découpler de la théorie et de faire apparaître le potentiel effectif pour les scalaires. Ensuite, il faut minimiser ce potentiel qui va générer des termes de masses pour différents champs *via* le mécanisme de Higgs. Puis, le lagrangien étant défini en termes d'états propre d'interactions, il faut diagonaliser les différentes matrices de masses afin d'obtenir les états propres de masse. Une fois ce travail réalisé, nous avons encore la possibilité de nous placer dans une jauge particulière, la jauge unitaire par exemple, qui est très utilisée puisqu'elle permet de réabsorber les bosons de Goldstone. Enfin, un lagrangien complet en composantes étant obtenu, il nous sera permis de dicter des règles de Feynman et ainsi de calculer des sections efficaces, des probabilités de désintégrations, *etc...* Nous ne réaliserons pas ces différentes étapes car ce n'est pas le sujet de cette thèse. Néanmoins, nous présenterons les parties du lagrangien intéressantes pour nos travaux au moment voulu. La partie suivante est basée sur le MSSM alors que dans la dernière partie nous reviendrons sur des aspects plus formels sur les représentations de l'algèbre de supersymétrie.

³Il est important de noter ici que tous les superchamps sont dans la représentation fondamentale de $SU(2)_L$. Par conséquent, pour former des singlets de $SU(2)_L$, il est nécessaire d'introduire le produit \cdot pour la multiplication de deux doublets de $SU(2)_L$ qui est défini comme suit :

$$L \cdot H \equiv L^i H_i = \epsilon_{ij} L^i H^j,$$

avec

$$\epsilon_{12} \equiv -1 = -\epsilon_{21}.$$

Deuxième partie

Annihilation de neutralinos :
suppression du canal Zh et forme du
spectre en WW

Dans cette seconde partie, nous allons nous intéresser à la phénoménologie de l'annihilation de neutralinos. Plus précisément, les neutralinos étant des particules de Majorana, elles sont leurs propres antiparticules. Ainsi, leur annihilation au repos en bosons de jauge et en scalaires de Higgs-Englert-Brout (HEB), impose des contraintes sur les polarisations des bosons de jauge émis. Dans un premier temps, nous nous concentrerons sur l'annihilation de neutralinos en un boson Z et un scalaire de HEB, afin d'évaluer les problèmes à haute énergie engendrés par la polarisation du Z . Dans un second temps, la forme du spectre d'annihilation en deux bosons W polarisés ou non sera étudiée. Nous investiguerons ensuite les implications possibles de la polarisation des W pour des télescopes à neutrinos mais aussi pour l'analyse de données issues de la détection de positrons dans des expériences de type ballons (HEAT en particulier [16]).

Chapitre 7

Introduction au problème

Dans ce premier chapitre, nous présenterons les neutralinos à partir des états propres d'interactions. Puis le problème qui nous intéresse, sera exposé dans le cadre de recherche de matière noire supersymétrique. Nous mènerons une première analyse naïve du phénomène afin d'établir que les amplitudes pour l'annihilation de neutralinos en Zh ou en $t\bar{t}$ par échange de boson Z semblent du même ordre de grandeur. Puis, ces amplitudes seront comparées numériquement dans le but de déceler si notre analyse simpliste était correcte pour le modèle mSugra et pour le MSSM.

Sommaire

7.1	Matrice de masse des neutralinos	49
7.2	Importance du canal Zh pour la détection de MN	51
7.3	Comparaison naïve entre $(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z$ et $(\chi\chi \rightarrow t\bar{t})_Z$	55
7.4	Processus dominant ou dominé ?	56
7.5	Généralité de la suppression dans le modèle mSugra	57
7.6	Comparaison du phénomène dans mSugra et dans le MSSM	57

7.1 Matrice de masse des neutralinos

Dans le MSSM, les neutralinos sont des états propre de masse, combinaisons linéaires du mélange de jaugino et higgsino¹ :

$$\chi_i = N_{i1}\tilde{b} + N_{i2}\tilde{w}_3 + N_{i3}\tilde{h}_1 + N_{i4}\tilde{h}_2.$$

Ce sont des spineurs de Majorana, c'est-à-dire qu'ils sont leurs propres antiparticules (consulter l'annexe B.5).

Il y a trois termes distincts qui donnent des contributions à la masse des neutralinos dans le lagrangien du MSSM :

$$\mathcal{L}_{masse} = \mathcal{L}_{couplage} + \mathcal{L}_{potentiel} + \mathcal{L}_{soft},$$

¹la matrice de mélange N sera présentée plus en détails dans ce qui suit.

qui s'expriment comme² :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{couplage} &= -i\sqrt{2} \sum_{S=1,2} \text{tr} \left(H_S^\dagger \lambda^\alpha \tilde{h}_{\alpha S} - \bar{\tilde{h}}_{\alpha S} \bar{\lambda}^\alpha H_S \right), \\ \mathcal{L}_{potentiel} &= -\mu \left(\tilde{h}_1^1 \tilde{h}_2^2 + h.c. \right), \\ \mathcal{L}_{soft} &= -\frac{1}{2} \left(M_1 \tilde{b}\tilde{b} + M_2 (\tilde{w}_1 \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 \tilde{w}_3) + h.c. \right).\end{aligned}$$

Nous pouvons alors exprimer la contribution neutre du lagrangien de masse sous forme matricielle :

$$\mathcal{L}_{m_\chi} = -\frac{1}{2} (\psi^0)^T M \psi^0 + h.c.),$$

avec :

$$\psi^0 = \begin{pmatrix} -i\tilde{b} \\ -i\tilde{w}_3 \\ \tilde{h}_1^1 \\ \tilde{h}_2^2 \end{pmatrix}, \quad \psi^0{}^T = (-i\tilde{b}, -i\tilde{w}_3, \tilde{h}_1^1, \tilde{h}_2^2)$$

La matrice de masse dans la base $(\tilde{b}, \tilde{w}_3, \tilde{h}_1^1, \tilde{h}_2^2)$ est alors donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -m_Z s_W c_\beta & m_Z s_W s_\beta \\ 0 & M_2 & m_Z c_W c_\beta & -m_Z c_W s_\beta \\ -m_Z s_W c_\beta & m_Z c_W c_\beta & 0 & -\mu \\ m_Z s_W s_\beta & -m_Z c_W s_\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

avec la notation :

$$s_W = \sin \theta_W, c_W = \cos \theta_W, \quad (7.2)$$

$$s_\beta = \sin \beta, \quad c_\beta = \cos \beta, \quad (7.3)$$

où l'angle β est défini par : $\tan \beta = v_2/v_1$, v_2 et v_1 étant respectivement les valeurs moyennes dans le vide (*vev* pour vacuum expectation value en anglais) des champs de Higgs-Englert-Brout [20,66] H_1 et H_2 après brisure du groupe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ en $U(1)_{QED}$ [18]. Il est évident que les termes non diagonaux proportionnels à m_Z , regroupés dans des matrices 2×2 , dans la matrice de masse (7.1) résultent de la brisure électrofaible. En effet ces éléments de matrice proviennent de termes de mélanges Higgs-higgsinos-bosons de jauge après minimisation du potentiel de Higgs. Cette dernière remarque se révèle importante pour la suite.

Cette matrice peut être diagonalisée par une matrice unitaire N :

$$N^* M N^{-1} = M_D, \quad (7.4)$$

où M_D est la matrice diagonale contenant les masses des neutralinos. Si les phases pouvant violer CP autorisées dans la matrice de masse des neutralinos sont négligées, il est possible

²la définition de λ est donnée dans la première partie, équation (6.11).

de choisir une base dans laquelle la matrice N est réelle. Dans ce cas, les masses de neutralinos sont réelles et signées.

Le lagrangien s'écrit alors :

$$\mathcal{L}_{m_\chi} = -\frac{1}{2} (\chi_i^0{}^T M_D{}_{ii} \chi_i^0 + h.c.). \quad (7.5)$$

Les matrices de mélange ont été utilisées pour définir les états propres de masse, qui sont appelés neutralinos, à partir des états propres d'interaction : $\chi_i^0 = N_{ij} \psi_j^0$. Dans tout ce qui suit, nous utilisons la notation quadri-spinneur (voire Annexe A.4) :

$$\chi_i = \begin{pmatrix} \chi_{i\alpha}^0 \\ \bar{\chi}_{i\dot{\alpha}}^0 \end{pmatrix}.$$

Cette écriture nous permet de mettre le lagrangien (7.5) sous la forme condensée :

$$\mathcal{L}_{m_\chi} = \frac{1}{2} \bar{\chi}_i (M_D)_{ii} \chi_i.$$

7.2 Importance du canal Zh pour la détection indirecte de matière noire

Après la naissance de la relativité générale et de la théorie quantique des champs, se sont mis en place les modèles standards de la physique des particules et de la cosmologie. Chacune des deux théories comporte de très beaux succès comme les concordances des prédictions théoriques avec les résultats expérimentaux en physique des particules tels que la nucléosynthèse primordiale et le rayonnement cosmologique. Il faut faire face cependant à des lacunes sur le plan théorique et des faiblesses devant certaines mesures expérimentales. Citons à ce stade quelques exemples : matière noire, platitude de l'Univers, asymétrie baryonique, constante cosmologique... Or, il se trouve que phénoménologiquement, cosmologie et physique des particules peuvent s'accorder sur certains aspects par l'émergence de solutions à partir de scénarii conjoints comme la baryogénèse.

Cependant, le modèle standard de la physique des particules et celui de la cosmologie seuls se révèlent incapables de décrire la quantité de données observationnelles récemment collectées sur une large échelle de distances. Aussi *ad-hoc* qu'elle puisse sembler, l'hypothèse de la matière noire [47,62] constitue probablement une partie de l'ensemble des ingrédients nécessaires pour comprendre l'augmentation de la self-interaction gravitationnelle de la matière, sur des échelles allant de la galaxie à l'Univers visible. D'autres ingrédients encore plus exotiques, comme l'énergie noire répulsive, ou la modification de la gravitation elle-même, peuvent se révéler nécessaires pour rendre compte de l'apparente accélération de l'Univers. En l'absence d'une solution théorique unifiée, les recherches expérimentales sont le seul moyen de prouver la validité de telles hypothèses, comme l'existence de cette mystérieuse matière noire. Ainsi, la découverte d'une nouvelle particule, dont l'interaction non-gravitationnelle serait compatible avec une densité relique de matière noire froide requise par le CMB (Cosmic Microwave Background), et qui pourrait expliquer la formation de structures à grande échelle [90,91], permettrait de conforter l'hypothèse de la matière noire. Les interactions de cette particule avec les particules du MS sont, par définition très faibles et ce, pour tenir compte de la non-observation d'une telle forme de matière. Jusqu'à présent l'observation de ces nouvelles particules se révèle très compliquée à obtenir, un peu comme pour le neutrino prédit par Pauli en 1930. Des débats tels que ceux rencontrés autour de l'annonce de l'expérience DAMA [7,9,12,21–25,27–34,43,44,49,57–61,69,79,81,87]

pour la détection directe de matière noire sont illustratifs de cette difficulté. C'est pourquoi il est crucial de pouvoir faire des tests croisés et de comprendre les résultats d'autant de différentes façons possibles ; avec des théories bien motivées. Tous ces ingrédients sont nécessaires pour mener des analyses croisées de données expérimentales ; afin d'affirmer ou d'infirmer un scénario de matière noire. Dans cette partie, nous allons travailler avec le très étudié neutralino (χ) des modèles supersymétriques (mSugra ou MSSM) que nous avons présenté dans la section précédente.

Dès 1965 [10, 99, 100], il a été montré que si une nouvelle particule stable existait, elle pourrait avoir une abondance significative aujourd'hui. L'Univers primordial peut être vu comme une soupe, ou plasma de particules d'espèces différentes en expansion très proche de l'équilibre thermique. Or l'observation par Hubble en 1929 de l'expansion de l'Univers, implique que ce dernier ne cesse de se refroidir depuis le Big Bang. Ainsi chacune des espèces relativistes (chaudes) dans la phase dense de l'Univers devient non relativiste (froide) au cours d'un changement de régime, lorsque la température descend en-dessous de son énergie de masse ($T < m_i$). Si le plasma primordial restait à l'équilibre thermique, l'Univers serait entièrement déterminé par sa température. Cependant, ce sont les phénomènes hors équilibres qui déterminent les moments marquant de l'histoire de l'Univers tels que le découplage des neutrinos, des photons (à l'origine du CMB), de la nucléosynthèse primordiale... C'est cette notion d'écart à l'équilibre qui nous permettra de calculer la densité relique de matière noire. L'évolution d'un gaz hors équilibre est dictée par l'équation de Boltzmann. Par conséquent, pour connaître la densité relique de matière noire, le système d'équations de Boltzmann couplées décrivant le plasma primordial devra être résolu. Ce système comprend une équation par espèce présente avec toutes les interactions impliquant tous les processus pouvant faire varier le nombre de particules de l'espèce considérée. Donc, pour une espèce i l'équation de Boltzmann s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dn_i}{dt} = & -3Hn_i - \sum_{j=1}^N \langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle \left(n_i n_j - n_i^{\text{eq}} n_j^{\text{eq}} \right) \\ & - \sum_{j \neq i} \left[\langle \sigma_{Xij} v_{iX} \rangle \left(n_i n_X - n_i^{\text{eq}} n_X^{\text{eq}} \right) - \langle \sigma_{Xij} v_{jX} \rangle \left(n_j n_X - n_j^{\text{eq}} n_X^{\text{eq}} \right) \right] \\ & - \sum_{j \neq i} \left[\Gamma_{ij} \left(n_i - n_i^{\text{eq}} \right) - \Gamma_{ji} \left(n_j - n_j^{\text{eq}} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.6)$$

où $H \equiv \frac{\dot{R}}{R}$ est le paramètre de Hubble avec $R(t)$ le facteur d'échelle et n_i la densité de l'espèce i . D'autre part, nous avons adopté les notations suivantes :

$$\sigma_{ij} = \sum_X \sigma(ij \rightarrow X), \quad (7.7)$$

$$\sigma_{Xij} = \sum_X \sigma(iX \rightarrow jY), \quad (7.8)$$

$$\Gamma_{ij} = \sum_X \Gamma(i \rightarrow jX). \quad (7.9)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (7.6) est la dilution due à l'expansion de l'Univers, le second terme décrit les annihilations ($i = j$) et les coannihilations ($i \neq j$), le troisième terme les diffusions et enfin le dernier terme les désintégrations. Les crochets $\langle \rangle$ signifient que nous avons considéré la moyenne thermique. La vitesse relative entre

deux particules i et j est, quant à elle, définie par :

$$v_{ij} = \frac{\sqrt{(p_i \cdot p_j)^2 - m_i^2 m_j^2}}{E_i E_j}, \quad (7.10)$$

avec p_i la quadri-impulsion et E_i l'énergie de la particule i . La densité de particules i à l'équilibre n_i^{eq} est donnée par :

$$n_i^{\text{eq}} = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int \mathbf{p}_i f_i, \quad f_i = \frac{1}{e^{(E_i - \mu_i)/T} \pm 1}, \quad (7.11)$$

\mathbf{p}_i étant la tri-impulsion de la particule, μ_i son potentiel chimique et f_i la distribution d'impulsion à l'équilibre cinétique.

Dans le scénario standard, des annihilations de neutralinos ont eu lieu dans le passé comme nous venons de l'expliquer, ont gelé à certains endroits et recommencé à d'autres, en particulier dans les points chauds tels que le centre galactique ou le noyau du soleil. Dans ces endroits spécifiques, la matière noire s'est accumulée. Un point crucial est l'étude des produits de désintégrations des particules issues de l'annihilation de neutralinos, prisonniers dans ces objets massifs. Ces études sont nécessaires pour évaluer la pertinence de la détection indirecte de matière noire. Cependant pour identifier un signal indirect, mais aussi pouvoir mesurer une masse pour le neutralino à partir de données provenant de flux (par exemple de photons ou de neutrinos), il est nécessaire de distinguer précisément un tel flux du fond astrophysique très mal connu. Ce fond n'est estimé que *via* des spectres en énergie suivant des lois de puissance. Dès lors, la détection indirecte pourra se révéler fructueuse si les neutralinos s'annihilent en particules se désintégrant en photons ou neutrinos avec des spectres les plus durs possibles, et une coupure proche de la masse du neutralino. C'est la manière la plus sûre de pouvoir "sortir", de manière inambiguë, un signal du fond astrophysique. À partir des figures (7.1) et (7.2), les canaux les plus prometteurs sont ceux avec deux bosons de jauge ($\chi\chi \rightarrow W^+W^-$, ou ZZ) ou bien un boson de jauge et un scalaire de Higgs-Englert-Brout (HEB) ($\chi\chi \rightarrow Zh$).

Sur la figure (7.1), les spectres W^+W^- et Zh sont de formes similaires. De tels spectres sont dit durs. Ceci provient du fait que les bosons de jauge de $SU(2)$ sont lourds et se désintègrent rapidement en une paire neutrino/lepton chargé. Dans le processus $\tau\bar{\tau}$, les neutrinos seront moins énergétiques, car il y a une désintégration en trois corps : $\tau \rightarrow \mu\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$. Pour le processus $t\bar{t}$, la désintégration se fait en deux étapes : d'abord $t \rightarrow Wb$ puis $b \rightarrow c\mu\bar{\nu}_\mu$, ce qui explique le spectre basse énergie. Nous pouvons faire une première remarque sur ce canal : le diagramme avec échange de boson Z en voie s devrait être le processus prépondérant, de par le fait que le boson Z est beaucoup plus léger que les particules SUSY impliquées dans les autres diagrammes. Le spectre $b\bar{b}$ est dit mou (ou "soft" en anglais), et n'est donc pas intéressant pour la détection indirecte. Il serait possible de faire le même type d'analyse pour la figure (7.2).

Les spectres différentiels en énergie pour les neutrinos (figure (7.1)) et les photons (figure (7.2)) ont été extraits d'une simulation PYTHIA avec 10^6 événements pour chaque canal, exprimés comme fonctions de $x = E_{\nu, \gamma}/m_\chi$. Pour le canal Zh par médiation de boson Z , qui nous concerne particulièrement, nous avons pris la précaution de corriger le résultat non polarisé de PYTHIA par un facteur $\propto x(1-x)$, ceci afin d'avoir un boson Z purement longitudinal, qui supprime l'émission de neutrinos vers l'avant, comparé au canal WW . Malgré ce facteur, le canal Zh produit toujours le second spectre le plus dur.

Pour les photons, la partie dure du canal Zh autour de $x \approx 1$ vient de HEB légers h se désintégrant via des boucles en deux photons, et donc n'apparaît qu'aux grandes

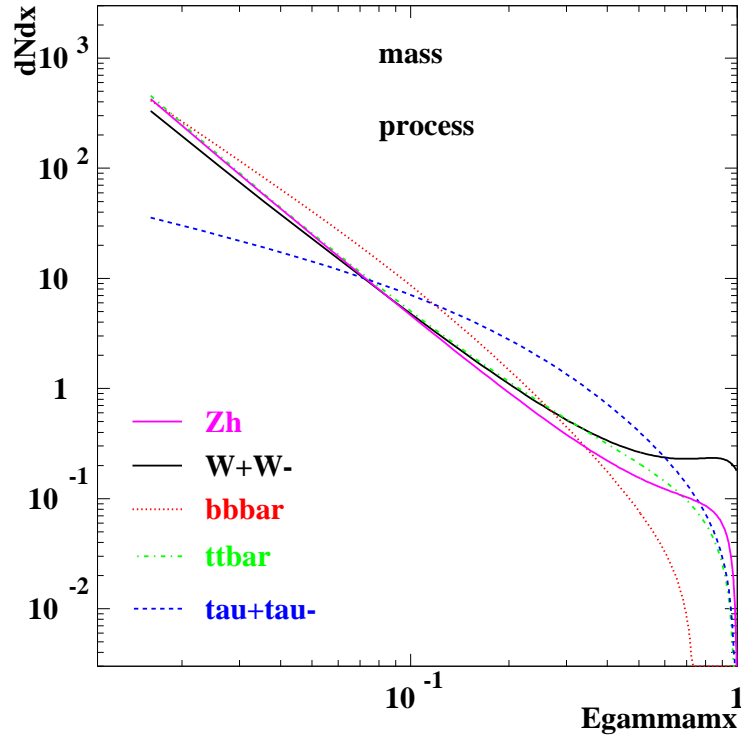


FIG. 7.1 – Flux différentiel de neutrinos pour les principaux canaux de désintégration provenant de l’annihilation de neutralinos. Les normalisations (dépendant des rapports de branchements) sont arbitraires, de manière à pouvoir comparer les formes de tous les canaux. La dépendance en m_χ (1 TeV ici) est faible .

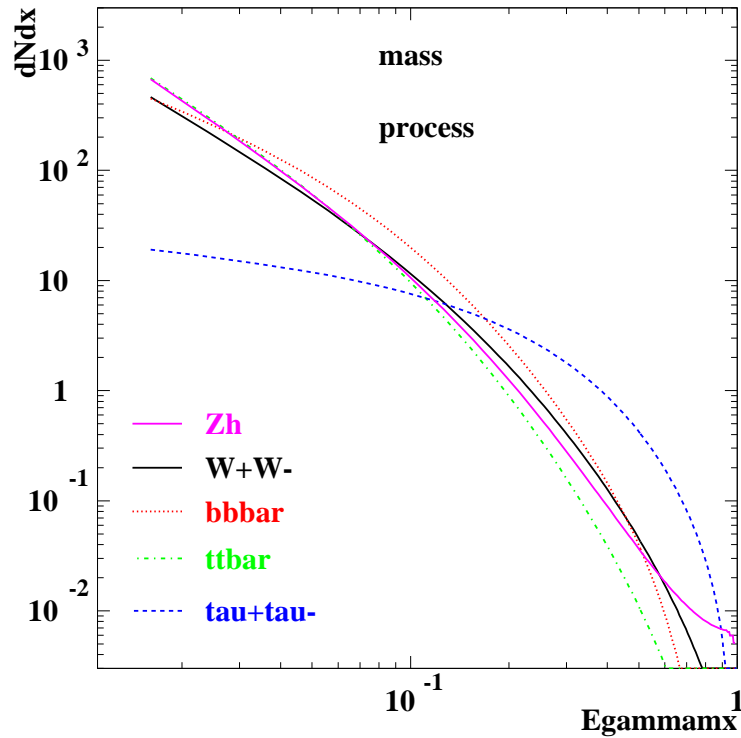


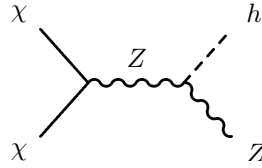
FIG. 7.2 – Flux différentiel de photons pour les principaux canaux de désintégration provenant de l’annihilation de neutralinos.

valeurs de x . Ceci nous laisse alors seulement un petit nombre d'événements ($\sim 10/\text{bin}$) et ainsi des incertitudes statistiques conséquentes, qui n'apparaissent pas dans la figure (7.2). Il n'y a évidemment pas d'événements pour $x > 1$, mais la forme précise de ce spectre (probablement similaire à celui des WW dans la figure (7.1)) est obscurcie par ces incertitudes.

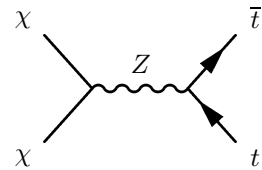
7.3 Comparaison naïve entre $\chi\chi \rightarrow Zh$ et $\chi\chi \rightarrow t\bar{t}$ via médiation de boson Z

Les états propres de masse pour les particules supersymétriques sont supposés plus massifs afin de rendre compte de la non observation de ces nouvelles particules. Cette propriété est commune à tout modèle phénoménologiquement viable. C'est ainsi que les processus avec médiation de bosons Z vont être favorisés, ces particules étant légères.

Nous travaillerons toujours avec des matrices de mélange N réelles et des masses de neutralinos signées. En particulier $m_{\chi_3} < 0$, donc $C^V = 0$ (voir définition (B.2) dans l'appendice B.1). De plus, nous mènerons notre étude dans la limite de découplage du pseudo scalaire A , donc $\sin(\alpha - \beta) \simeq -1$ (équation (B.5)). Si seul les couplages sont pris en compte, nous pouvons extraire le comportement suivant :



$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z \propto \frac{-g^2 m_Z O_{11}^Z}{\cos^2 \theta_W}, \quad (7.12)$$



$$A(\chi\chi \rightarrow t\bar{t})_Z \propto \frac{-g^2 m_t O_{11}^Z}{\cos^2 \theta_W}, \quad (7.13)$$

avec (voire appendice B.1) :

$$O_{ij}^Z = N_{i4}N_{j4} - N_{i3}N_{j3}. \quad (7.14)$$

Dans l'amplitude (7.13), nous avons juste considéré le couplage axial puisque le couplage vectoriel ne participe pas à l'annihilation de neutralinos dans l'approximation de particules de Majorana au repos. Nous nous sommes contentés d'ajouter des termes de masse provenant de la cinématique pour faire une comparaison grossière. Il peut ainsi être noté que les amplitudes devraient donner des contributions du même ordre de grandeur.

7.4 Processus dominant ou dominé ?

Pour mener une étude numérique, il convient de choisir un point précis de l'espace des paramètres du modèle mSugra : $m_0 = 3000 \text{ GeV}$, $m_{1/2} = 800 \text{ GeV}$, $A_0 = 0$, $\tan \beta = 10$ et $\mu > 0$. Ainsi pour l'annihilation de neutralinos au repos (grâce au code DarkSusy version 3.14.02 [26] et Suspect version 2.003 [1]), nous avons :

$$\begin{aligned} v\sigma(\chi\chi \rightarrow \text{all}) &= 1,053.10^{-28} \text{ cm}^3/\text{s} \\ v\sigma(\chi\chi \rightarrow t\bar{t}) &= 1,028.10^{-28} \text{ cm}^3/\text{s} \\ v\sigma(\chi\chi \rightarrow WW) &= 4,375.10^{-31} \text{ cm}^3/\text{s} \\ v\sigma(\chi\chi \rightarrow b\bar{b}) &= 1,217.10^{-30} \text{ cm}^3/\text{s} \\ v\sigma(\chi\chi \rightarrow ZZ) &= 2,294.10^{-31} \text{ cm}^3/\text{s} \\ v\sigma(\chi\chi \rightarrow Zh) &= 1,485.10^{-31} \text{ cm}^3/\text{s} \end{aligned}$$

D'après ces résultats, le canal Zh ne semble plus particulièrement intéressant puisque sa section efficace est très supprimée. Toutefois, si l'annihilation de neutralinos en $t\bar{t}$ par médiation de boson Z est calculée, nous trouvons le résultat suivant :

$$v\sigma(\chi\chi \rightarrow t\bar{t})_Z = 1,831.10^{-28} \text{ cm}^3/\text{s}.$$

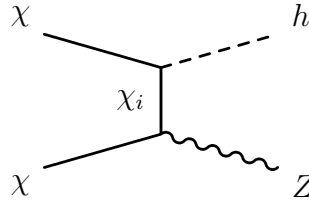
Il est instructif de remarquer que ce processus donne une contribution importante pour le canal $t\bar{t}$. Le même calcul pour une annihilation en Zh via un boson Z , nous donne :

$$v\sigma(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z = 4,716.10^{-28} \text{ cm}^3/\text{s},$$

qui est du même ordre de grandeur que pour $t\bar{t}$, comme prédit par l'analyse simpliste. Il est même possible de remarquer que ce canal devrait dominer la section efficace totale d'un facteur 4 environ. Donc, nous sommes en droit de nous demander quel mécanisme permettra de supprimer le canal Zh et non le canal $t\bar{t}$. Des effets d'interférence entre les différentes voies pour chaque canal peuvent être supposés et peut-être jouer un rôle. Cependant la présence des matrices de mélange impliquées dans les différents couplages rendent les expressions analytiques des amplitudes peu lisibles.

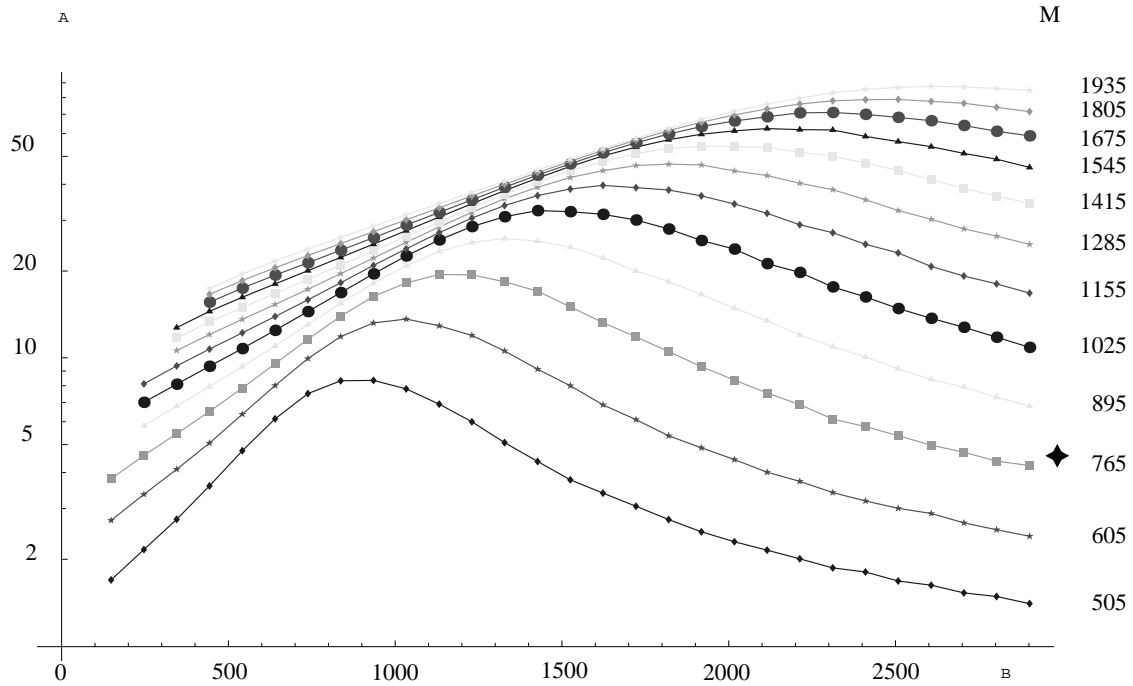
Dans un premier temps, il est nécessaire de comprendre les autres processus impliqués dans chaque canal dans le but d'investiguer l'effet potentiel d'interférences. Pour $t\bar{t}$, l'autre diagramme pouvant intervenir est la médiation de sfermions en voie t ; diagramme très supprimé si les sparticules sont très lourdes, ce qui est le cas de tout modèle phénoménologiquement intéressant. Pour le canal Zh , il y a deux autres diagrammes qui rentrent en jeu :

- échange de pseudoscalaire A en voie s : diagramme très supprimé puisque nous travaillerons toujours dans la limite de découplage (B.7) afin de simplifier l'analyse du phénomène³,
- échange de neutralinos en voie t :



Donc, *a priori*, seulement deux diagrammes interviennent dans le canal Zh s'annulant l'un l'autre avec une précision relative de 10^{-3} . Une telle suppression semble trop marquée pour être accidentelle.

³Il est possible de noter que cette hypothèse n'implique aucune différence conceptuelle, juste une simplification des calculs.

FIG. 7.3 – $(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z$ sur tous les canaux de désintégration pour différents $m_0, m_{1/2}$

7.5 Généralité de la suppression dans le modèle mSugra

Avant de supposer une quelconque raison pour cette suppression, nous devons être certain de ne pas travailler sur un point critique de l'espace des paramètres. Pour cela un balayage du plan $m_{1/2}, m_0$ est réalisé (grâce à l'interface entre Suspect et DarkSusy développé dans [75]).

Sur la figure (7.3), il peut être remarqué le canal Zh via médiation de boson Z s'impose sur l'ensemble du plan $(m_{1/2}, m_0)$, sauf dans la zone de bas $m_{1/2}$, où l'annihilation est dominé par le canal $b\bar{b}$. Par contre sur la figure (7.4), nous observons une suppression de ce même canal pour tout le plan $(m_{1/2}, m_0)$, lorsque voie s et voie t sont prises en compte. Une remarque importante à propos de cette figure tient dans le fait que plus $m_{1/2}$ et m_0 sont grands, meilleure est la suppression. Cette propriété implique que la suppression apparaît de manière explicite, quand les paramètres de brisure de supersymétrie $m_{1/2}, m_0$ sont grand devant m_Z le paramètre de brisure électrofaible. D'après ces deux graphiques, nous pouvons conclure que nous ne sommes donc pas sur un point critique de l'espace des paramètres.

Cependant il est encore possible de se demander si ce n'est pas un artefact du modèle mSugra; ce modèle utilisant une brisure de supersymétrie *via* la gravitation. Or, le mécanisme de brisure n'étant toujours pas connu, ne serait-il pas plus prudent de travailler dans le cadre le plus général?

7.6 Comparaison du phénomène dans mSugra et dans le MSSM

Le MSSM est un modèle effectif où aucune hypothèse sur le mécanisme de brisure n'est faite. Il est cependant nécessaire de faire une supposition sur le type de brisure, qui doit être douce, de manière à conserver les bonnes propriétés UV de la théorie. Ainsi, nous

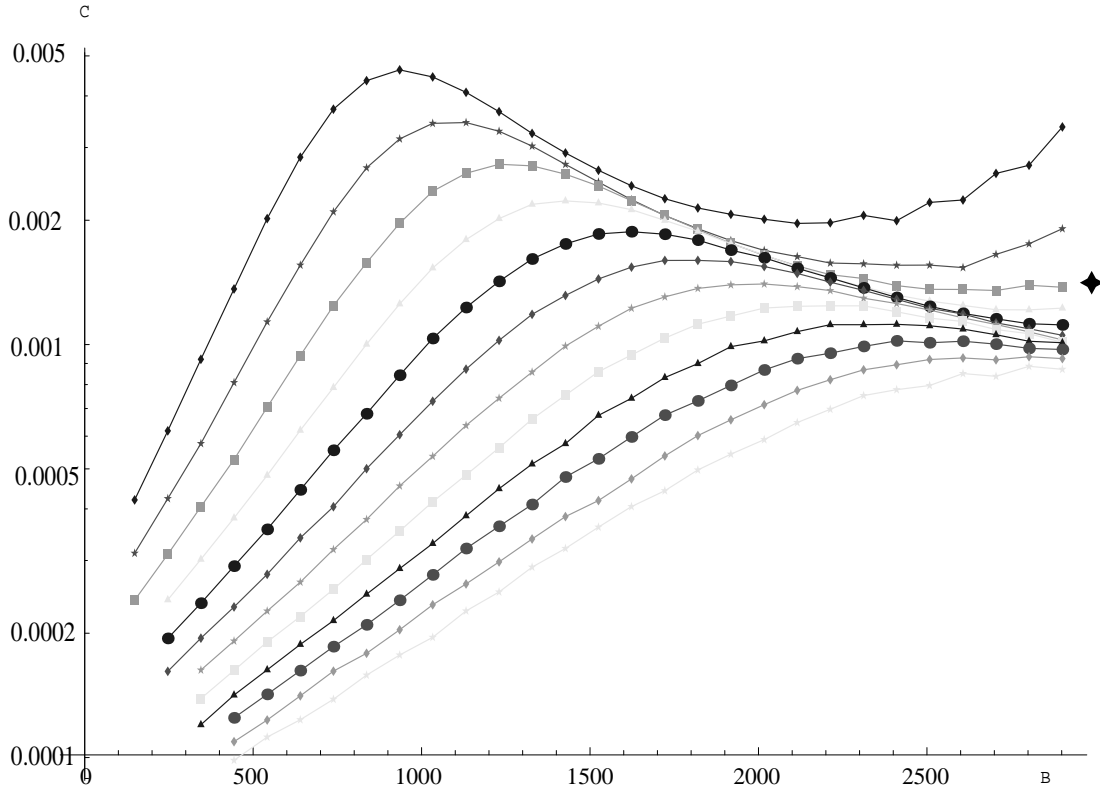


FIG. 7.4 – $(\chi\chi \rightarrow Zh)_{Z+\chi}$ sur tous les canaux de désintégration pour différents $m_0, m_{1/2}$

voulons vérifier que la suppression du canal Zh a bien lieu dans ce modèle plus général. Afin de travailler avec un minimum de paramètres à faire varier, nous supposons une unification des forces à une échelle d'énergie M_{GUT} qui nous donne la relation suivante [72] :

$$M_1 = \frac{5}{3} \tan \theta_W M_2 \simeq 0.5 M_2.$$

Les amplitudes à calculer sont⁴ :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z = -i\sqrt{2}\beta_{Zh} \frac{m_\chi^2}{m_Z^2} \frac{g^2}{c_W^2} O_{11}^Z, \quad (7.15)$$

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_\chi = i\sqrt{2}\beta_{Zh} \frac{m_\chi^2}{m_Z^2} \frac{g^2}{c_W^2} \sum_{i=1}^4 \frac{2O_{1i}^Z O_{1i}^h (m_{\chi_i} - m_\chi) m_Z}{2m_\chi^2 + 2m_{\chi_i}^2 - m_h^2 - m_Z^2}, \quad (7.16)$$

avec O_{ij}^h défini dans l'appendice B.3, équation (B.10) :

$$O_{ij}^h = ((c_W N_{i2} - s_W N_{i1})(s_\beta N_{j4} - c_\beta N_{j3}) + (i \leftrightarrow j)). \quad (7.17)$$

Le premier constat à faire concerne les amplitudes contenant les matrices de mélange N . Ces dernières obscurcissent l'observation possible d'interférences. Le phénomène impliquant l'annulation entre ces deux amplitudes semble non trivial... Pour notre étude numérique, ces amplitudes doivent être exprimées en fonction des paramètres fondamentaux du modèle, à savoir les masses des différentes particules du modèle standard, ainsi que les paramètres de brisure électrofaible : μ et de supersymétrie : M_1, M_2 . Pour cela,

⁴L'approximation de découplage du pseudoscalaire A (B.7) a été explicitement utilisée

les valeurs propres et les vecteurs propres exacts de la diagonalisation de la matrice de masse (7.1) doivent être connus (voire [71]). Comme déjà mentionné, nous travaillons ici avec des matrices de mélange N réelles, donc les masses seront signées :

$$\epsilon_1 m_{\chi_1} = - \left(\frac{a}{2} - \frac{C_2}{6} \right)^{1/2} + \left(-\frac{a}{2} - \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{(8a - \frac{8}{3}C_2)^{1/2}} \right)^{1/2} + \frac{1}{4} (M_1 + M_2), \quad (7.18)$$

$$\epsilon_2 m_{\chi_2} = + \left(\frac{a}{2} - \frac{C_2}{6} \right)^{1/2} - \left(-\frac{a}{2} - \frac{C_2}{3} - \frac{C_3}{(8a - \frac{8}{3}C_2)^{1/2}} \right)^{1/2} + \frac{1}{4} (M_1 + M_2), \quad (7.19)$$

$$\epsilon_3 m_{\chi_3} = - \left(\frac{a}{2} - \frac{C_2}{6} \right)^{1/2} - \left(-\frac{a}{2} - \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{(8a - \frac{8}{3}C_2)^{1/2}} \right)^{1/2} + \frac{1}{4} (M_1 + M_2), \quad (7.20)$$

$$\epsilon_4 m_{\chi_4} = + \left(\frac{a}{2} - \frac{C_2}{6} \right)^{1/2} + \left(-\frac{a}{2} - \frac{C_2}{3} - \frac{C_3}{(8a - \frac{8}{3}C_2)^{1/2}} \right)^{1/2} + \frac{1}{4} (M_1 + M_2), \quad (7.21)$$

où ϵ_i est le signe de la $i^{\text{ème}}$ valeur propre avec :

$$C_2 = (M_1 M_2 - m_Z^2 - \mu^2) - \frac{3}{8} (M_1 + M_2)^2,$$

$$C_3 = -\frac{1}{8} (M_1 + M_2)^3 + \frac{1}{2} (M_1 + M_2) (M_1 M_2 - m_Z^2 - \mu^2) + (M_1 + M_2) \mu^2 \\ + (M_1 c_W^2 + M_2 s_W^2) m_Z^2 - \mu m_Z^2 \sin 2\beta,$$

$$C_4 = (M_1 c_W^2 + M_2 s_W^2) m_Z^2 \mu \sin 2\beta - M_1 M_2 \mu^2 + \frac{1}{16} (M_1 M_2 - m_Z^2 - \mu^2) (M_1 + M_2)^2 \\ - \frac{1}{256} (M_1 + M_2)^4 + \frac{1}{4} (M_1 + M_2) ((M_1 + M_2) \mu^2 + (M_1 c_W^2 + M_2 s_W^2) m_Z^2 - \mu m_Z^2 \sin 2\beta),$$

et

$$U = -\frac{C_2^2}{3} - 4C_4, \quad S = -C_3^2 - \frac{2}{27} C_2^3 + \frac{8}{3} C_2 C_4, \\ D = -4U^2 - 27S^2, \quad a = \frac{1}{2^{1/3}} \text{Re} \left[-S + i \left(\frac{D}{27} \right)^{1/2} \right]^{1/3}.$$

Les masses des différents neutralinos sont données par les équations (7.18), (7.19), (7.20) et (7.21) qui ne sont pas ordonnées. Il s'avère nécessaire de renommer les masses en fonction de leurs valeurs absolues afin d'obtenir $m_{\chi_1} < m_{\chi_2} < m_{\chi_3} < m_{\chi_4}$.

D'une part, les vecteurs propres sont donnés par :

$$\frac{N_{i2}}{N_{i1}} = -\frac{1}{\tan \theta_W} \frac{M_1 - \epsilon_i m_{\chi_i}}{M_2 - \epsilon_i m_{\chi_i}}, \quad (7.22)$$

$$\frac{N_{i3}}{N_{i1}} = \frac{\mu (M_2 - \epsilon_i m_{\chi_i}) (M_1 - \epsilon_i m_{\chi_i}) - m_Z^2 s_\beta c_\beta ((M_1 - M_2) c_W^2 + M_2 - \epsilon_i m_{\chi_i})}{m_Z (M_2 - \epsilon_i m_{\chi_i}) s_W (c_\beta \mu + \epsilon_i m_{\chi_i} s_\beta)}, \quad (7.23)$$

$$\frac{N_{i4}}{N_{i1}} = \frac{-\epsilon_i m_{\chi_i} (M_2 - \epsilon_i m_{\chi_i}) (M_1 - \epsilon_i m_{\chi_i}) - m_Z^2 c_\beta^2 ((M_1 - M_2) c_W^2 + M_2 - \epsilon_i m_{\chi_i})}{m_Z (M_2 - \epsilon_i m_{\chi_i}) s_W (c_\beta \mu + \epsilon_i m_{\chi_i} s_\beta)}. \quad (7.24)$$

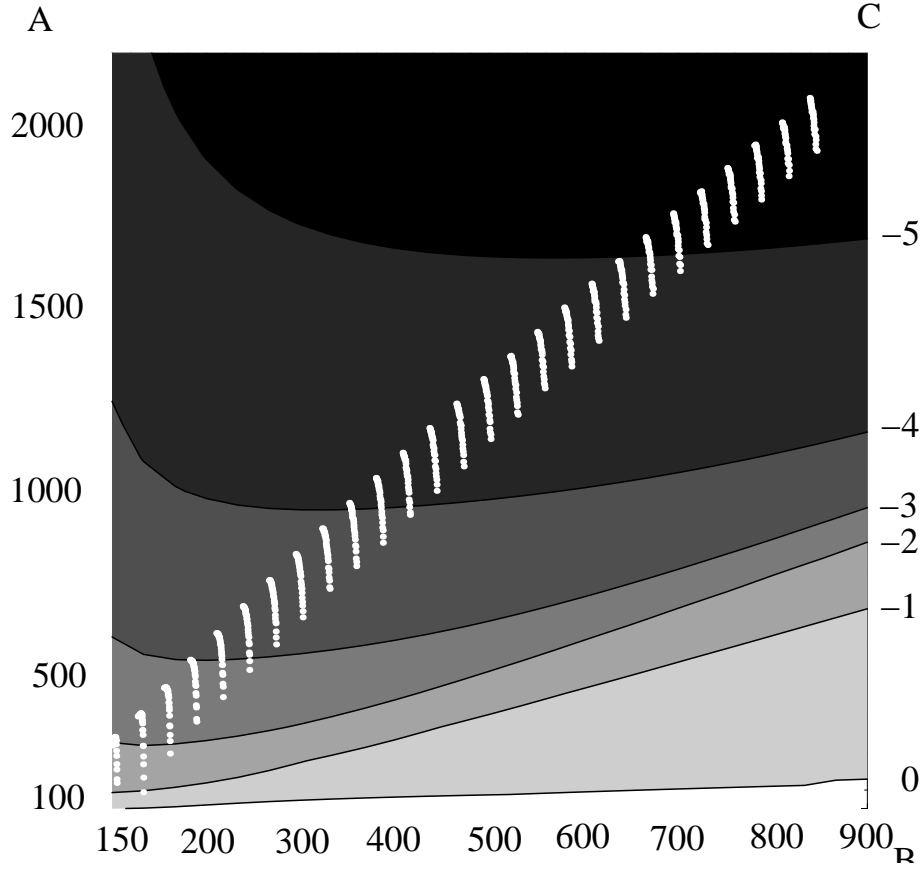


FIG. 7.5 – $\frac{\sigma(\chi\chi \rightarrow Zh)_{Z+\chi}}{\sigma(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z}$ dans le MSSM (figure de contour) et dans mSugra (points blancs)

D'autre part, il faut prendre en considération la condition de normalisation :

$$N_{i1} = \left(1 + \left(\frac{N_{i2}}{N_{i1}} \right)^2 + \left(\frac{N_{i3}}{N_{i1}} \right)^2 + \left(\frac{N_{i4}}{N_{i1}} \right)^2 \right)^{-1/2}.$$

Nous sommes alors prêts à utiliser les formules (7.15) et (7.16) en fonction de (M_1, μ) afin de réaliser un balayage dans ce plan (figure (7.5)). Comme précédemment la suppression du canal est valide pour presque tout le plan, excepté dans la région de bas μ . Or, dans cette région le neutralino le plus léger est majoritairement de type higgsino, cette région n'est donc pas intéressante d'un point de vue phénoménologique. Nous pouvons conclure, que la suppression a lieu dans l'approximation $M_{SM} \ll M_{SUSY}$. Cependant, le point crucial de cette approximation est l'inégalité suivante : $m_Z \ll M_{SUSY}$ ce qui correspond à la hiérarchie nécessaire entre brisure électrofaible et brisure de supersymétrie pour avoir un modèle phénoménologiquement viable. Donc, ce ne sera pas la supersymétrie, qui assurera la suppression du canal. D'autre part, comme la suppression est un phénomène général, un autre type de symétrie en sera responsable. De ce fait, ne devons-nous pas chercher du côté de l'invariance de jauge en premier lieu ?

Chapitre 8

Amplitude polarisée et approximation $M_{SUSY} \gg M_{MS}$

Dans ce chapitre, nous commencerons par calculer les amplitudes polarisées pour l'annihilation de neutralino en Zh . Puis, l'approximation $M_{SUSY} \gg M_{MS}$, mise en évidence précédemment, sera utilisée afin de simplifier la forme analytique des amplitudes (7.15) et (7.16). Enfin, nous essaierons de mettre en évidence les problèmes liés à cette approximation, ce qui nous mènera sur des pistes à examiner pour comprendre le phénomène mis en jeu dans l'annulation du canal Zh .

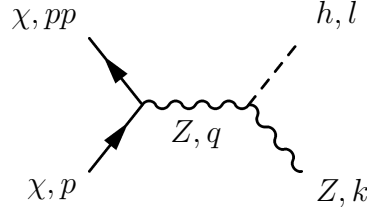
Sommaire

8.1	$\chi\chi \rightarrow Zh$ via boson Z en voie s	61
8.2	Canal t	64
8.3	Développement en série de Taylor des amplitudes	65
8.4	Théorie des perturbations	66
8.5	Polarisation longitudinale et unitarité à haute énergie	69
8.6	Théorème d'équivalence	70

8.1 $\chi\chi \rightarrow Zh$ via boson Z en voie s

Dans cette section, l'amplitude $(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z$ sera calculée d'une manière un peu différente de celles des références habituelles [48, 89]. En effet, nous travaillons dans l'approximation de neutralinos au repos. Les effets de cette approximation sont les premiers points à investiguer. Par construction, les neutralinos sont des particules de Majorana, *i.e.* ils sont leurs propres antiparticules. Comme l'approximation de repos est utilisée pour les neutralinos piégés dans les corps massifs, le spin et la projection du spin du système initial pour de telles particules doivent être nuls (ceci à cause du principe d'exclusion de Pauli). Étant donné la présence dans l'état final d'une particule scalaire $S = 0$ et d'une particule vectorielle $S = 1$, la seule polarisation possible pour cette dernière particule est une polarisation longitudinale. Il est possible de remarquer que le système final doit posséder un moment angulaire non nul, plus précisément : $L = 1$, pour assurer la conservation du moment angulaire total : $J = L + S$. Dans ce cas ci, il s'avère inutile de mener un calcul avec une somme sur toutes les hélicités possibles, puisqu'un seul état d'hélicité contribuera à la section efficace. Ainsi, il sera utile pour le calcul, autant que pour la compréhension du problème, de travailler avec des amplitudes polarisées. En outre, avec cette

technique, nous aurons directement accès à l'amplitude physique, et non à son module au carré comme c'est le cas lors d'un calcul avec des sommations sur les différentes hélicités (consulter l'annexe B.6 pour plus de détails). Le but de cette analyse est de rendre manifeste les phénomènes d'interférences.



L'amplitude du diagramme précédent s'écrit :

$$A(\chi\bar{\chi} \rightarrow Zh)_Z = \frac{-iC_A C_Z}{q^2 - m_Z^2} (\bar{\chi}(p') \gamma^\mu \gamma_5 \chi(p)) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2} \right) \varepsilon^\nu(k), \quad (8.1)$$

avec $\chi = u$, le neutralino entrant, d'impulsion p et $\bar{\chi} = \bar{v}$ "l'antineutralino" entrant, avec une impulsion p' . Ici, u et v sont des spineurs de Dirac habituels (c'est pourquoi une distinction entre χ et $\bar{\chi}$ est faite, et que les lignes fermioniques associées sont orientées). Nous effectuerons les calculs avec des spineurs au repos dans la base chirale (voir Appendice A) :

$$\chi(p_0) = \sqrt{m_\chi} \begin{pmatrix} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix},$$

avec $\xi_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} - & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}$: l'orientation vers le haut de la projection du spin suivant l'axe z ,
 et $\xi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} & 0 \\ + & 1 \end{pmatrix}$: l'orientation vers le bas.

D'autre part, les spineurs pour les antiparticules sont définis tels que :

$$\bar{\chi}(p'_0) = \sqrt{m_\chi} (-\eta_{s'}, \eta_{s'}),$$

où $\eta_{s'}$ est l'orientation de la projection du spin. Travaillant avec un état initial scalaire, le boson Z dans l'état final possédera seulement une polarisation longitudinale, comme expliqué précédemment. Cette polarisation s'écrit :

$$\varepsilon^\mu(k) = \frac{1}{m_Z} (k^z, 0, 0, k^0).$$

Il est utile de remarquer que l'orientation de la base de référence permettant de définir la direction de la polarisation du boson Z est, *a priori*, différente de celle de l'état initial. Toutefois l'état initial étant scalaire, il n'y a pas d'orientation préférentielle pour le système de coordonnées. Donc, pour simplifier les calculs, l'orientation donnée par la direction de propagation du boson Z sera choisie.

Au repos, nous avons : $q_\mu = (2m_\chi, \vec{0})$. Après simplification, l'amplitude (8.1) devient :

$$A(\chi_s \bar{\chi}_{s'} \rightarrow Zh)_Z = \frac{iC_A C_Z}{4m_\chi^2 - m_Z^2} \frac{m_\chi}{m_Z} (\eta_{s'} \bar{\sigma}^\mu \xi_s + \eta_s \sigma^\mu \xi_{s'}) \\ \times \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2} \right) (k^z, 0, 0, k^0),$$

Le lecteur doit faire attention qu'un spin "up" pour une particule signifie un spin "down" pour l'antiparticule correspondante. Cette propriété est automatiquement prise en compte lorsqu'on impose la condition de Majorana (B.15) :

$$\eta_s = -i\sigma^2 \xi_s. \quad (8.2)$$

L'amplitude précédente prend alors la forme suivante :

$$A(\chi_\uparrow \chi_\downarrow \rightarrow Zh)_Z = \frac{iC_A C_Z}{4m_\chi^2 - m_Z^2} \frac{m_\chi}{m_Z} (\sigma_{11}^\mu + \bar{\sigma}_{11}^\mu) \\ \times \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_0 q_0}{m_Z^2} \right) (k^z, 0, 0, k^0). \quad (8.3)$$

Avec la définition des matrices de Pauli donnée en Appendice A.16, nous obtenons :

$$A(\chi_\uparrow \chi_\downarrow \rightarrow Zh)_Z = \frac{2iC_A C_Z}{4m_\chi^2 - m_Z^2} \frac{m_\chi}{m_Z} (1, 0, 0, 0) \\ \times \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_0 q_0}{m_Z^2} \right) (k^z, 0, 0, k^0). \quad (8.4)$$

À ce stade, il faut noter que l'état initial est de genre temps, donc indépendant de l'orientation de l'espace. Cette propriété était attendu pour l'annihilation au repos de neutralinos.

Ainsi, l'équation (8.4) devient :

$$A(\chi_\uparrow \chi_\downarrow \rightarrow Zh)_Z = -2iC_A C_Z \frac{m_\chi}{m_Z^3} k^z. \quad (8.5)$$

Après un peu de calcul cinématique, il peut être montré que :

$$k^z = m_\chi \beta_{Zh},$$

où β_{Zh} est la fonction cinématique usuelle :

$$\beta_{Zh} = \sqrt{1 - \frac{(m_h + m_Z)^2}{4m_\chi^2}} \sqrt{1 - \frac{(m_h - m_Z)^2}{4m_\chi^2}}. \quad (8.6)$$

En utilisant la définition des constantes de couplages (B.3) et (B.6), ainsi que la définition (B.4), nous trouvons :

$$A(\chi_\uparrow \chi_\downarrow \rightarrow Zh)_Z = \frac{-ig^2 O_{11}^Z}{\cos^2 \theta_W} \frac{m_\chi^2}{m_Z^2} \beta_{Zh}. \quad (8.7)$$

Si l'orientation des spin initiaux est inversée, il est aisé de noter que cela revient à remplacer la composante (1,1) des matrices de Pauli dans l'équation (8.3), par la composante (2,2). De plus, il est à signaler l'apparition d'un signe moins global, provenant de la condition de Majorana (8.2). Finalement, l'amplitude avec les spin initiaux renversés, sera exactement identique à celle que nous venons de calculer (8.7) à un signe près. Donc la condition de Majorana impose l'antisymétrie de l'amplitude de manière évidente. Pour avoir l'amplitude totale pour ce processus, la différence de ces deux contributions doit être considérée avec le bon facteur de normalisation, ce qui nous permet de trouver :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z = -ig^2\sqrt{2}\frac{O_{11}^Z}{\cos^2\theta_W}\frac{m_\chi^2}{m_Z^2}\beta_{Zh} \quad (8.8)$$

Ce résultat peut être rencontré dans la littérature par un calcul prenant en compte toutes les polarisations possibles de l'état initial [48,89]. Il est alors intéressant de constater qu'au repos, une seule polarisation contribue.

Maintenant, nous sommes en mesure de comparer l'équation (8.8) avec :

$$A(\chi\chi \rightarrow t\bar{t})_Z = -ig^2\sqrt{2}\frac{O_{11}^Z}{\cos^2\theta_W}\frac{m_\chi m_t}{m_Z^2}T_{3t}\beta_{t\bar{t}}, \quad (8.9)$$

où

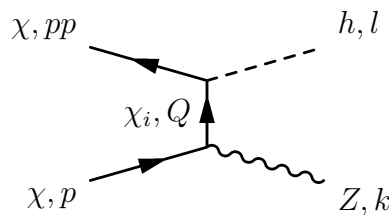
$$\beta_{t\bar{t}} = \sqrt{1 - \frac{m_t^2}{m_\chi^2}},$$

avec T_3 l'isospin faible du quark top.

Dans cette section, nous avons calculé l'amplitude exacte pour l'échange de boson Z en voie s . La différence principale entre les amplitudes (8.8) et (8.9) est un facteur m_χ . Cette propriété explique pourquoi la section efficace $\sigma(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z$ est dominante par rapport à $\sigma(\chi\chi \rightarrow t\bar{t})_Z$; propriété qui a été mise en évidence de manière numérique dans le chapitre précédent. Nous pouvons cependant nous demander comment l'ajout de la voie t nous donnera le comportement adéquat de l'amplitude pour ce canal ?

8.2 Canal t

En utilisant, comme précédemment, un calcul à partir de spineurs polarisés, il est possible de calculer l'amplitude associée au diagramme suivant :



$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_{\chi_i} = \frac{-iC_{\chi_i\chi Z}^A C_{h\chi_i\chi}}{Q^2 - m_{\chi_i}^2} (\bar{\chi}(p') (Q + m_{\chi_i}) \gamma^\mu \gamma^5 \chi(p)) \varepsilon_\mu(k),$$

avec

$$Q^\mu = (m_\chi - k^0, 0, 0, k^z).$$

Les calculs se font suivant la logique montré pour le calcul du canal Zh , en voie s. Une fois tous les calculs réalisés, nous trouvons :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_{\chi_i} = \frac{ig^2\sqrt{2}}{\cos^2\theta_W} \frac{m_\chi^2}{m_Z^2} \beta_{Zh} \frac{2O_{1i}^Z O_{1i}^h (m_{\chi_i} - m_\chi) m_Z}{2m_\chi^2 + 2m_{\chi_i}^2 - m_Z^2 - m_h^2}. \quad (8.10)$$

Dorénavant, le problème est de comprendre comment deux amplitudes apparemment si différentes que celles rencontrées précédemment (8.8) et (8.10), peuvent s'annuler avec un tel degré de précision.

8.3 Développement en série de Taylor des amplitudes

Comme nous l'avons montré dans la section 7.6, les formules analytiques pour les masses et les matrices de mélanges sont plutôt longues. Ainsi, il n'est pas aisé de comprendre le phénomène d'interférences entre les amplitudes (8.8) et (8.10) de manière analytique. Il est donc utile dans un premier temps de simplifier ces expressions à l'aide de méthodes d'approximations. Nous avons déjà noté que la symétrie assurant l'annulation exacte entre les deux amplitudes semblait restaurée dans l'approximation : $M_{SM} \ll M_{SUSY}$, donc nous allons utiliser un développement en M_{SM}/M_{SUSY} des formules (7.18-7.21) pour les masses :

$$\begin{aligned} m_{\chi_1} &\simeq M_1 - m_Z^2 \frac{\sin^2\theta_W (M_1 + \mu \sin 2\beta)}{\mu^2 - M_1^2}, \\ m_{\chi_2} &\simeq M_2 - m_Z^2 \frac{\cos^2\theta_W (M_2 + \mu \sin 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2}, \\ m_{\chi_3} &\simeq -\mu - m_Z^2 \frac{(1 - \sin 2\beta) (\mu + M_1 \cos^2\theta_W + M_2 \sin^2\theta_W)}{2(\mu + M_1)(\mu + M_2)}, \\ m_{\chi_4} &\simeq +\mu + m_Z^2 \frac{(1 + \sin 2\beta) (\mu - M_1 \cos^2\theta_W - M_2 \sin^2\theta_W)}{2(\mu - M_1)(\mu - M_2)}. \end{aligned}$$

Le même type de développement est utilisé pour les éléments de la matrice de mélange :

$$\begin{aligned} \frac{N_{2i}}{N_{1i}} &\simeq -\frac{1}{\tan\theta_W} \frac{M_1 - m_{\chi_i}}{M_2 - m_{\chi_i}}, \\ \frac{N_{3i}}{N_{1i}} &\simeq \mu \frac{(M_2 - m_{\chi_i})(M_1 - m_{\chi_i}) - m_Z^2 \sin\beta \cos\beta ((M_1 - M_2) \cos^2\theta_W + M_2 - m_{\chi_i})}{m_Z (M_2 - m_{\chi_i}) \sin\theta_W (\mu \cos\beta + m_{\chi_i} \sin\beta)}, \\ \frac{N_{4i}}{N_{1i}} &\simeq -m_{\chi_i} \frac{(M_2 - m_{\chi_i})(M_1 - m_{\chi_i}) - m_Z^2 \cos^2\beta ((M_1 - M_2) \cos^2\theta_W + M_2 - m_{\chi_i})}{m_Z (M_2 - m_{\chi_i}) \sin\theta_W (\mu \cos\beta + m_{\chi_i} \sin\beta)}. \end{aligned}$$

Avec ceci, à l'ordre zéro du développement dans les amplitudes, nous trouvons :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z \simeq -\sqrt{2}\beta_{Zh} m_\chi^2 g^2 \cos 2\beta t_W^2 \frac{1}{(M_1^2 - \mu^2)}, \quad (8.11)$$

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_\chi \simeq \sqrt{2}\beta_{Zh} m_\chi^2 g^2 \cos 2\beta t_W^2 \frac{(M_1^2 + \mu^2)}{(M_1^2 - \mu^2)(M_1^2 + \mu^2 - \frac{1}{2}m_h^2)}. \quad (8.12)$$

Ainsi dans notre approximation, l'annulation exacte entre les deux canaux est obtenu après développement du propagateur dans l'équation (8.12).

Ainsi, dans l'approximation $M_{SUSY} \gg M_{SM}$, l'exactitude de la suppression a été mise en évidence. Ceci semble correct d'après l'analyse des graphiques (7.4) et (7.5). Cette méthode est quelque peu "brutale". Néanmoins, ce développement semble reproduire les résultat de [64] utilisant la théorie des perturbations. Nous allons étudier à présent, le phénomène en utilisant cette méthode afin de comprendre ce qu'un tel développement peut nous apprendre de plus sur la suppression du canal Zh .

8.4 Théorie des perturbations

La mécanique quantique est principalement basée sur le formalisme hamiltonien où le principal problème est la diagonalisation de matrices, afin de trouver vecteurs et valeurs propres. Ici aussi, notre problème se résume à une diagonalisation de matrice (7.1), afin d'extraire l'information pertinente sur ses vecteurs et valeurs propres pour comprendre le phénomène qui nous intéresse. Ainsi, nous utilisons la théorie des perturbations dans le but de dégager le phénomène de suppression d'une manière plus élégante que précédemment.

Pour commencer, séparons la matrice de masse M en deux parties :

$$M = M_0 + W,$$

avec M_0 la matrice de masse "non-perturbée" :

$$M_0 = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \end{pmatrix},$$

et :

$$W = m_Z \begin{pmatrix} 0 & 0 & -s_W c_\beta & s_W s_\beta \\ 0 & 0 & c_W c_\beta & -c_W s_\beta \\ -s_W c_\beta & c_W c_\beta & 0 & 0 \\ s_W s_\beta & -c_W s_\beta & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la perturbation.

Si comme précédemment, nous nous place dans l'approximation : $m_Z \ll M_1, M_2, \mu$, de manière à avoir $W \ll M_0$, la matrice W peut alors être considérée comme une perturbation du système M_0 . Il nous sera donc possible d'utiliser la théorie des perturbations dans sa forme standard de Rayleigh-Shrödinger [73]. Premièrement, nous devons connaître les valeurs et vecteurs propres non perturbés. En d'autre mots, le système suivant doit être résolu :

$$N^0 M_0 N^{0T} = m^0.$$

Une fois cette étape réalisée, nous obtenons pour les valeurs propres non perturbées (après normalisation) :

$$m^0 = \text{diag}(M_1, M_2, -\mu, \mu),$$

et pour les vecteurs propres non perturbés :

$$N^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ces derniers peuvent être réécrits comme :

$$N^{0T} = (\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0, \varphi_4^0).$$

Maintenant, les corrections au premier ordre en m_Z/M_{SUSY} , sont données par la valeur moyenne de la perturbation W dans la base non perturbée φ_n^0 , ce qui s'écrit :

$$m_n^1 = \langle \varphi_n^0 | W | \varphi_n^0 \rangle,$$

en notation de Dirac. Ainsi notre problème se limite au calcul de :

$$W^0 = N^0 W N^{0T}.$$

Les perturbations aux masses seront juste les éléments diagonaux de W^0 :

$$W^0 = m_Z \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{s_W s_-}{\sqrt{2}} & \frac{s_W s_+}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{c_W s_-}{\sqrt{2}} & -\frac{c_W s_+}{\sqrt{2}} \\ \frac{s_W s_-}{\sqrt{2}} & -\frac{c_W s_-}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{s_W s_+}{\sqrt{2}} & -\frac{c_W s_+}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.13)$$

avec

$$\begin{aligned} s_- &= s_\beta - c_\beta, \\ s_+ &= s_\beta + c_\beta. \end{aligned}$$

À cause de la structure de la matrice W , il est évident que les termes diagonaux de (8.13) sont nuls, ce que nous avons vérifié. Alors, nous n'avons pas de corrections à la masse au premier ordre. En outre, nous savons que :

$$\langle \varphi_p^0 | \varphi_n^1 \rangle = \frac{W_{pn}^0}{m_n^0 - m_p^0} \text{ pour } p \neq n.$$

Sachant, que les vecteurs propres de la perturbation, sont orthogonaux :

$$|\varphi_n^1\rangle = \sum_{p \neq n} \frac{W_{pn}^0}{m_n^0 - m_p^0} |\varphi_p^0\rangle,$$

il est possible de calculer : $N^{1T} = (\varphi_1^1, \varphi_2^1, \varphi_3^1, \varphi_4^1)$ explicitement ;

$$\frac{N^1}{m_Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{s_W C_1}{M_1^2 - \mu^2} & \frac{s_W S_1}{M_1^2 - \mu^2} \\ 0 & 0 & \frac{c_W C_2}{M_2^2 - \mu^2} & -\frac{c_W S_2}{M_2^2 - \mu^2} \\ -\frac{s_W s_-}{\sqrt{2}(M_1 + \mu)} & \frac{c_W s_-}{\sqrt{2}(M_2 + \mu)} & 0 & 0 \\ \frac{s_W s_+}{\sqrt{2}(\mu - M_1)} & \frac{c_W s_+}{\sqrt{2}(M_2 - \mu)} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.14)$$

avec

$$\begin{aligned} C_{1,2} &= (\mu s_\beta + M_{1,2} c_\beta), \\ S_{1,2} &= (M_{1,2} s_\beta + \mu c_\beta). \end{aligned}$$

Au premier ordre, la matrice de mélange est écrite comme : $N = N^0 + N^1$. Avec cette définition, nous pouvons calculer les amplitudes (7.15) et (7.16). Avant de faire ceci, il faut cependant réfléchir à quelle matrice de mélange, il faut appliquer les perturbations, de manière à avoir un développement cohérent pour chacune des amplitudes (par cohérent, j'entends ayant la même puissance de M_{SM}/M_{SUSY} dans l'amplitude).

D'une part, pour l'amplitude (7.15), les choses sont simples puisque le vertex $\chi\chi Z$, n'existe pas à l'ordre zéro, quand le neutralino le plus léger est majoritairement bino ($M_1 < M_2, \mu$). Nous sommes donc obligés de travailler avec les matrices de mélanges perturbées pour ce vertex. Toutefois, l'autre vertex nécessaire est purement "modèle standard", par conséquent nous obtenons l'amplitude suivante :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z \simeq -\sqrt{2}\beta_{Zh}m_\chi^2 g^2 \cos 2\beta \tan^2 \theta_W \frac{1}{(M_1^2 - \mu^2)}. \quad (8.15)$$

Ce phénomène provient de la nécessité d'avoir un mélange entre higgsinos et jauginos pour bénéficier d'un couplage au boson vectoriel Z , ce qui arrive seulement après brisure électrofaible.

D'autre part, il s'avère obligatoire de perturber les termes hors diagonaux dans les vertex $\chi\chi_i Z$ et $h\chi\chi_i$ de l'amplitude (7.16), ce qui implique :

$$\begin{aligned} A(\chi\chi \rightarrow Zh)_\chi &\simeq \sqrt{2}\beta_{Zh}m_\chi^2 g^2 \cos 2\beta \tan^2 \theta_W \\ &\times \frac{(M_1^2 + \mu^2)}{(M_1^2 - \mu^2)(M_1^2 + \mu^2 - \frac{1}{2}m_Z^2 - \frac{1}{2}mh^2)}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Il est aisé de remarquer que les mêmes résultats que précédemment sont obtenus : équations (8.11) et (8.12). Cependant, les équations (8.15) et (8.16) ne sont pas du même ordre en M_{MS}/M_{SUSY} dans le développement et ce, à cause du propagateur dans l'égalité (8.16). Donc, un développement de celui-ci doit être effectué, qui nous donne finalement :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_\chi \simeq \sqrt{2}\beta_{Zh}m_\chi^2 g^2 \cos 2\beta \tan^2 \theta_W \frac{1}{(M_1^2 - \mu^2)} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_Z^2 + m_h^2}{M_1^2 + \mu^2} \right). \quad (8.17)$$

Le premier terme de l'équation (8.17) annule exactement l'amplitude (8.15). Comme précédemment, la suppression du canal Zh à l'ordre zéro dans le développement en m_Z/M_{SUSY} a été mise en évidence. L'information supplémentaire ici, provient du terme suivant dans le développement, qui semble être d'ordre $(m_Z/M_{SUSY})^2$.

De plus, il paraît possible de décomposer l'amplitude avec propagation de neutralino en voie t en deux parties. Une partie annule celle avec échange de boson Z en voie s et une partie sous-dominante (cette dernière assertion reste à démontrer). De manière analytique, pour comprendre ce phénomène il faudrait pouvoir mettre l'amplitude (7.16) sous la forme :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_\chi = i2\sqrt{2}\beta_{Zh} \frac{m_\chi}{m_Z} \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W} \left(\frac{m_\chi}{m_Z} O_{11}^Z + \sum_{i=1}^4 R_i \right), \quad (8.18)$$

avec :

$$R_i = \frac{O_{1i}^Z O_{1i}^h (2m_{\chi_i} m_\chi - 4m_\chi^2 - 2m_{\chi_i}^2 + m_h^2 + m_Z^2)}{2m_\chi^2 + 2m_{\chi_i}^2 - m_h^2 - m_Z^2}. \quad (8.19)$$

Ceci impliquerait une relation non intuitive entre les couplages :

$$\sum_i O_{1i}^Z O_{1i}^h = -\frac{m_\chi}{m_Z} O_{11}^Z.$$

De surcroît, cette écriture compacte cache une réalité encore plus complexe une fois utilisée la définition des couplages ((7.14), (7.17)) :

$$\begin{aligned} (N_{i4}^2 - N_{i3}^2) \frac{m_\chi}{m_Z} = & -\sum_{i=1}^4 (N_{14} N_{i4} - N_{13} N_{i3}) \\ & \times \{ (c_W N_{12} - s_W N_{11}) (s_\beta N_{i4} - c_\beta N_{i3}) \\ & + (c_W N_{i2} - s_W N_{i1}) (s_\beta N_{14} + c_\beta N_{13}) \}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

La découverte du lien complexe qui lie voie s et voie t pour le canal Zh , semble proche. Cependant la relation nécessaire pour comprendre en partie l'annulation, est hautement non triviale. Chercher directement à retrouver une telle relation paraît illusoire. Il semble alors plus facile d'extraire le comportement factice de la voie s, qui induit un mauvais raisonnement (nous nous contenterons de raisonner sur la voie s dans un premier temps, les calculs étant plus aisés). Le fait que seule la polarisation longitudinale est possible pour le boson Z , a déjà été mis en avant. Il semble que ce soit cette polarisation qui pose problème, c'est ce que nous essaierons de comprendre dans la partie suivante.

8.5 Polarisation longitudinale et unitarité à haute énergie

Le problème semble provenir de l'approximation $M_{SUSY} \gg M_{MS}$, qui est équivalente à une limite de haute énergie pour l'impulsion du boson Z émis. Or nous savons que dans cette approximation, le vecteur de polarisation du boson Z est aligné avec la direction de son impulsion, ce qui se matérialise par la relation approchée suivante :

$$\varepsilon_\mu(k) \simeq \frac{k_\mu}{m_Z}. \quad (8.21)$$

Cette dernière égalité signifie que la composante k^z peut être remplacée par k^0 dans l'amplitude (8.5), sachant que :

$$k^0 = m_\chi - \frac{m_h^2 + m_Z^2}{4m_\chi}.$$

Ainsi nous trouvons pour l'amplitude :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z = -i\sqrt{2} \frac{g^2 O_{11}^Z}{\cos^2 \theta_W} \frac{m_\chi^2}{m_Z^2} \left(1 + \frac{m_Z^2 - m_h^2}{4m_\chi^2} \right), \quad (8.22)$$

ce qui est équivalent à faire un développement de β_{Zh} au premier ordre en m_Z^2/M_{SUSY}^2 , m_h^2/M_{SUSY}^2 dans l'équation (8.8). Il est important de noter que l'un des facteurs m_χ de l'amplitude (8.22) vient d'un terme \sqrt{s} dans l'approximation de neutralinos au repos (ce qui peut être vérifié à partir du calcul exact exprimé dans [89]). Alors, il devient possible de mettre en évidence une partie du problème. D'après le théorème optique (voir section 9.4), le comportement de la section efficace à haute énergie peut être estimé. Ce comportement doit aller comme $1/s$. Compte tenu de la dynamique, ceci implique une amplitude constante. Or, nous avons mis en évidence la présence d'un terme dominant en \sqrt{s} pour l'amplitude. Ainsi, nous comprenons pourquoi une telle section efficace pose problème, puisque l'amplitude du diagramme en voie s semble violer l'unitarité de la théorie.

Maintenant, si un tel développement pour l'équation (8.9) est utilisé, nous trouvons :

$$A(\chi\chi \rightarrow t\bar{t})_Z = -i\sqrt{2} \frac{g^2 O_{11}^Z}{\cos^2 \theta_W} T_3 \frac{m_t m_\chi}{m_Z^2} \left(1 - \frac{m_t^2}{2m_\chi^2}\right). \quad (8.23)$$

Il est donc possible de remarquer, qu'un facteur de m_χ supplémentaire est présent dans l'égalité (8.22), comparé à l'amplitude (8.23). Cette présence explique l'apparente domination de $A(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z$ sur $A(\chi\chi \rightarrow t\bar{t})_Z$. De plus, toujours d'après la même référence [89], nous pouvons vérifier que le terme m_χ dans l'amplitude (8.23) ne provient pas d'un \sqrt{s} dans la limite de repos pour les neutralinos. Il peut de même être vérifié qu'une telle amplitude ne dépend pas de s , ce qui est en accord avec le théorème optique.

La seule manière pour le canal Zh de s'abstraire du problème d'unitarité, est l'annulation du terme dominant de l'amplitude (8.22) avec un terme similaire en voie t. Cette analyse ne pose pas de problèmes particuliers. De même que pour la voie s, elle correspond à un développement de β_{Zh} , cependant le problème réside dans l'analyse du second terme de l'équation (8.10). Comme en théorie des perturbations, pour comprendre le phénomène d'annulation, il faudrait de surcroît que l'amplitude puisse se mettre sous la forme d'un terme dominant plus un reste comme dans l'équation (8.18). Cette propriété expliquerait en même temps la domination du canal $t\bar{t}$ dans l'approximation au repos.

Il est possible de noter que nous sommes capable d'établir des relations d'ordre entre les différentes amplitudes en voie s. Cependant nous n'avons pas encore les moyens de dire de manière inambiguë si le mauvais comportement au repos provient seulement de problèmes d'unitarité à haute énergie ou bien si la problématique dans l'approximation de faible vitesse, fait rentrer d'autres phénomènes en jeu. L'ambiguïté provient de l'approximation au repos, où termes de masse et termes cinétiques sont confondus. Cependant nous commençons à comprendre de manière plus précise un des phénomènes mis en jeu : l'unitarité de la théorie.

8.6 Théorème d'équivalence

Comme nous l'avons déjà vu, à haute énergie, le boson Z possède une polarisation longitudinale (ceci est dû au caractère Majorana des neutralinos). C'est une caractéristique spécifique du mécanisme de Higgs. Quand la jauge unitaire est utilisée, comme c'est le cas ici, le scalaire de Goldstone est absorbé par le boson Z , ce qui lui confère une partie de sa composante longitudinale. Ainsi dans l'approximation haute énergie, il est possible de remplacer le boson Z par sa composante longitudinale qui n'est autre que le boson de Goldstone. C'est ce que nous apprend le théorème d'équivalence [68].

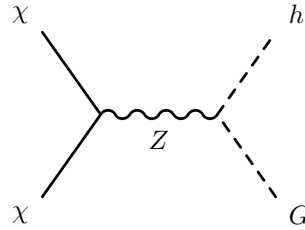
Il est donc possible de remplacer le vertex $Z - Z - h$ dans l'amplitude (8.5) par le couplage $G - Z - h$:

$$C_{Zh}^Z = iC_G (k - k')_\mu, \quad (8.24)$$

avec $C_G = \frac{g}{2\cos\theta_W}$, et comme nous savons que :

$$k^0 - k'^0 = \frac{m_Z^2 - m_h^2}{2m_\chi},$$

nous avons alors :



$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z = -i\sqrt{2}\frac{g^2 O_{11}^Z}{\cos^2\theta_W} \left(1 - \frac{m_h^2}{m_Z^2}\right), \quad (8.25)$$

qui est l'amplitude calculée précédemment (8.22), sans le terme dominant, et donc sans le terme violant l'unitarité à haute énergie. Il est intéressant de remarquer que, grâce à la dynamique, ce calcul donne directement la contribution “physique” sans le terme “problématique” qui est sensé s'annuler avec le diagramme en voie t. Le lecteur devra faire attention à ce genre d'analyse sur un seul diagramme, qui est très trompeuse, comme nous l'avons déjà remarqué. Ainsi, il nous est impossible de tirer une information concrète de ce genre d'analyse. Cette analyse a été menée, puisqu'il nous est encore impossible de tirer un raisonnement complet sur la voie t. Cependant, l'effet de l'interprétation de la partie longitudinale du boson Z a pu être remarqué. Cette composante provient de la jauge dans laquelle le calcul est réalisé lorsque l'analyse est menée sur un canal seul. Donc, l'indépendance de jauge devrait jouer un rôle dans le phénomène de suppression du canal Zh . Il peut être remarqué que conformément à l'intuition qui a été développée suite à l'analyse perturbative, le terme restant ici est deux ordres de grandeur plus bas que le terme dominant.

Ainsi dans ce chapitre, nous avons mis en évidence deux phénomènes potentiellement intéressants pour rendre compte de la suppression du canal Zh au repos. En premier lieu, il y a le problème d'unitarité à haute énergie ; mais aussi l'invariance de jauge de la théorie qui semble jouer un rôle. C'est ce que nous allons investiguer dans le prochain chapitre.

Chapitre 9

Invariance de jauge et unitarité

Dans la partie précédente, le fait de travailler dans la jauge unitaire a révélé des ambiguïtés. En effet, des termes potentiellement dangereux du point de vue de l’unitarité de la théorie à haute énergie peuvent apparaître, selon l’interprétation de la partie longitudinale du boson Z . Ainsi dans ce chapitre nous vérifierons dans un premier temps l’indépendance de jauge, avant d’utiliser des techniques dites “pinch” pour extraire la partie de chaque amplitude violant l’unitarité à haute énergie.

Sommaire

9.1	Indépendance de jauge	73
9.2	Diagonalisation de la matrice de masse	76
9.3	Matrice de masse et invariance de jauge	78
9.4	Borne d’unitarité	79
9.5	Extraction du reste	81
9.6	Étude du terme restant après annulation	82

9.1 Indépendance de jauge

Lorsque les calculs sont réalisés dans la jauge unitaire, le boson de Goldstone se “cache” dans la composante longitudinale du boson Z . Or, le boson de Goldstone est, par définition, dépendant de jauge. Ainsi, l’analyse sur un seul diagramme a toutes les chances d’être faussée. De plus dans ce formalisme, la jauge est fixée donc aucun paramètre de jauge n’apparaît dans les amplitudes. La présence de paramètres de jauge nous aurait permis de discriminer les parties pertinentes des parties factices, dépendantes explicitement de la jauge. Pour toutes ces raisons, l’indépendance de jauge du canal Zh sera vérifiée explicitement dans ce qui suit, en travaillant dans la jauge de ’t Hooft : la jauge R_ξ [82]. Cette jauge permet d’avoir une “traçabilité” du paramètre de jauge. De plus elle est particulièrement intéressante puisqu’elle découple tout de même les champs de jauge et les scalaires, à l’arbre.

En premier lieu, il convient de remarquer que dans le superchamp réel qui comporte le multiplet de jauge, seule la partie vectorielle est soumise à des transformations de jauge usuelles. Ainsi, les jauginos sont eux-mêmes invariants sous ces transformations. Les higgsinos quand à eux, sont invariants, mais par construction. Alors le neutralino sera intrinsèquement invariant, ce qui implique que l’échange de neutralino en voie t sera

indépendant de jauge. Donc, nous aurons seulement deux diagrammes dépendants de jauge, qui seront : échange de Z et de G en voie s.

La différence avec la jauge unitaire réside dans le fait que même si le boson de jauge n'a pas encore absorbé le Goldstone, il possède tout de même une partie longitudinale. Cette propriété provient de la séparation de la partie réelle du champ de Higgs entre une valeur moyenne (vev) et une perturbation (champ de Higgs physique). Ainsi les champs de jauge possèdent une masse et donc une partie longitudinale. Cette dernière correspond à la partie scalaire d'un champ de jauge massif lorsqu'on procède à une décomposition de Stückelberg.

Le propagateur du champ de jauge en jauge R_ξ , s'écrit :

$$\frac{-i}{q^2 - m_Z^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{(1 - \xi) q_\mu q_\nu}{q^2 - \xi m_Z^2} \right),$$

il est possible de décomposer sa partie longitudinale comme :

$$\frac{1 - \xi}{(q^2 - m_Z^2)(q^2 - \xi m_Z^2)} = \frac{1}{m_Z^2(q^2 - m_Z^2)} - \frac{1}{m_Z^2(q^2 - \xi m_Z^2)}. \quad (9.1)$$

De cette façon, il peut être noté que la partie longitudinale ne contient pas encore la partie provenant du Goldstone : le propagateur est constitué de la partie habituelle en jauge unitaire moins la contribution du Goldstone, qui va provenir, dorénavant, d'un diagramme différent.

En outre, les couplages eux, ne changent pas. Ainsi l'amplitude (8.1), devient :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_{Z\xi} = \frac{-iC^A C_Z}{q^2 - m_Z^2} (\bar{\chi}(p') \gamma^\mu \gamma_5 \chi(p)) \left(g_{\mu\nu} - \frac{(1 - \xi) q_\mu q_\nu}{q^2 - \xi m_Z^2} \right) \varepsilon^\nu(k).$$

Compte tenu de la décomposition du propagateur (9.1), l'amplitude précédente s'écrit :

$$A_{Z\xi} = A_Z + A_{G\xi}, \quad (9.2)$$

avec A_Z l'amplitude déjà calculée (8.1) et $A_{G\xi}$ une amplitude avec médiation d'un scalaire de Goldstone factice, mais conservant des couplages de jauge aux particules extérieures. Ici, nous ne nous intéressons qu'à la partie dépendante de jauge, autrement dit la seconde amplitude du membre de droite de l'égalité précédente (9.2) :

$$A_{G\xi}(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z = -i \frac{C^A C_Z}{m_Z^2} (\bar{\chi}(p') \gamma^\mu \gamma_5 \chi(p)) \frac{q_\mu q_\nu(k)}{q^2 - \xi m_Z^2}.$$

Après quelques manipulations algébriques, il est possible d'obtenir :

$$\begin{aligned} q_\mu (\bar{\chi}(p') \gamma^\mu \gamma_5 \chi(p)) &= (p + p')_\mu (\bar{\chi}(p') \gamma^\mu \gamma_5 \chi(p)) \\ &= \bar{\chi}(p') (\not{p} + m_\chi + \not{p}' - m_\chi) \gamma_5 \chi(p). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Si les lignes fermioniques extérieures sont considérées sur couche de masse, ce qui est le cas pour l'amplitude qui nous intéresse ; la relation précédente (9.3) devient :

$$q_\mu (\bar{\chi} \gamma^\mu \gamma_5 \chi) = 2m_\chi \bar{\chi} \gamma_5 \chi.$$

Avec la définition des couplages, nous obtenons :

$$A_{G\xi}(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z = \frac{-ig^2 O_{11}^Z m_\chi}{2 \cos^2 \theta_W m_Z} (\bar{\chi} \gamma_5 \chi) \frac{q_\nu(k)}{q^2 - \xi m_Z^2}. \quad (9.4)$$

Nous sommes donc parvenus à une forme simple pour l'expression de la partie dépendante de jauge de l'amplitude avec échange de boson Z en voie s . À présent, ce résultat doit être comparé à l'amplitude avec échange d'un boson de Goldstone, tenant compte des couplages des différentes particules au boson de Goldstone. Pour cela, le vertex $Z - Z - h$ est remplacé par celui $G - Z - h$ (8.24). Le propagateur du scalaire est simplement :

$$\frac{i}{q^2 - \xi m_Z^2} \quad ,$$

avec ξm_Z^2 la masse du boson de Goldstone.

Mais les choses se compliquent pour le vertex $G - \chi - \chi$. En effet, même si le boson de Goldstone est absorbé par le boson de jauge en jauge unitaire, il n'a pas le même couplage aux neutralinos. Pour connaître ce couplage, il est nécessaire de se remémorer la définition de G et de h en fonction des scalaires complexes avant la brisure de symétrie :

$$h = -\sqrt{2} (\sin \alpha \operatorname{Re} h_1 + \cos \alpha \operatorname{Re} h_2) , \quad (9.5)$$

$$G = -\sqrt{2} (\cos \beta \operatorname{Im} h_1 + \sin \beta \operatorname{Im} h_2) . \quad (9.6)$$

Ainsi le couplage $G - \chi - \chi$ aura la même structure que le couplage $h - \chi - \chi$. Cependant le couplage sera imaginaire et dépendra de l'angle de mélange β (9.6) :

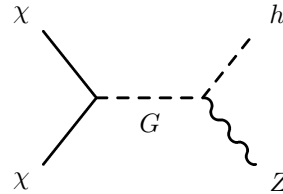
$$C_{\chi_i \chi_j G}^G = \frac{ig O_{ij}^G}{2 \cos \theta_W} , \quad (9.7)$$

où

$$O_{ij}^G = (N_{i2} c_W - N_{i1} s_W) (c_\beta N_{j3} + s_\beta N_{j4}) + (i \leftrightarrow j) . \quad (9.8)$$

Nous nous intéressons seulement à l'annihilation de neutralinos les plus légers ($i = j = 1$). Comme le couplage est imaginaire, le boson de Goldstone couple de manière axiale aux neutralinos.

Maintenant, nous avons tous les éléments nécessaires pour calculer l'amplitude du diagramme suivant :



$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_G = -C_{\chi\chi}^G C_G (\bar{\chi}(p') \gamma_5 \chi(p)) \frac{(q+k')_\mu}{q^2 - \xi m_Z^2} \varepsilon^\mu(k) . \quad (9.9)$$

Si la cinématique est prise en compte : $q = k + k'$ ainsi que de la condition de polarisation : $k\varepsilon(k) = 0$, l'amplitude précédente devient :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_G = -C_{\chi\chi G} C_G (\bar{\chi} \gamma_5 \chi) \frac{2q\varepsilon(k)}{q^2 - \xi m_Z^2} .$$

Avec les définitions des couplages, l'amplitude précédente devient :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_G = i \frac{g^2 O_{11}^G}{\cos \theta_W} (\bar{\chi} \gamma_5 \chi) \frac{q\varepsilon(k)}{q^2 - \xi m_Z^2}. \quad (9.10)$$

Les amplitudes (9.4) et (9.10) sont de structure similaire mais de signe opposé. De plus, il est évident que l'amplitude totale doit être indépendante du choix de jauge. Ainsi, à partir de ces mêmes amplitudes, nous pouvons extraire la relation :

$$O_{11}^Z \frac{m_\chi}{m_Z} = -\frac{1}{2} O_{11}^G,$$

qui peut être développée, utilisant les définitions (7.14) et (9.8) :

$$(N_{14}^2 - N_{13}^2) \frac{m_\chi}{m_Z} = -(N_{12}c_W - N_{11}s_W)(s_\beta N_{14} + c_\beta N_{13}). \quad (9.11)$$

Cette dernière équation est intéressante pour plusieurs raisons. Premièrement, elle rassemble les éléments nécessaires (masses et matrices de mélanges) à la relation requise entre les couplages des amplitudes (7.15) et (7.16) avec un signe moins devant c_β et sous une forme simplifiée. Deuxièmement, il est intéressant de noter qu'elle ne contient que valeurs propres et vecteurs propres, ce qui semble donc provenir de la diagonalisation de la matrice de masse.

Dans cette section, nous n'avons fait aucune hypothèse sur le neutralino utilisé, ainsi la relation (9.11) peut être généralisée pour n'importe quel neutralino :

$$(N_{i4}^2 - N_{i3}^2) \frac{m_{\chi_i}}{m_Z} = -(N_{i2}c_W - N_{i1}s_W)(s_\beta N_{i4} + c_\beta N_{i3}). \quad (9.12)$$

De la même manière, nous pouvons étendre cette relation à une coannihilation $\chi_i - \chi_j$ quelconque :

$$O_{ij}^Z \frac{m_{\chi_i} + m_{\chi_j}}{m_Z} = -O_{ij}^G,$$

qui est une écriture simplifiée pour l'égalité suivante :

$$(N_{i4}N_{j4} - N_{i3}N_{j3}) \frac{m_{\chi_i} + m_{\chi_j}}{m_Z} = -((N_{i2}c_W - N_{i1}s_W)(s_\beta N_{j4} + c_\beta N_{j3}) + (i \leftrightarrow j)). \quad (9.13)$$

Ainsi nous avons extrait des relations nécessaires à l'indépendance de jauge. Il est possible de vérifier leurs validités de manière numérique, mais nous n'en avons pas encore procédé à la démonstration analytique. Ce sera la tâche de la prochaine section.

9.2 Diagonalisation de la matrice de masse et indépendance de jauge

Dans la section précédente, les relations nécessaires à l'indépendance de jauge ont été extraites. Cependant, nous n'avons encore aucune justification à ces égalités. Nous pouvons juste mettre en évidence leurs structures, qui impliquent des relations entre vecteurs propres et valeurs propres. Dans ce qui suit nous allons raisonner à partir de

l'équation (9.12) par simplicité mais une extension à la relation (9.13) bien que lourde au niveau des calculs, ne pose aucun problème conceptuel. Nous débutons de la relation de diagonalisation de la matrice M (7.4) :

$$(NM)_{ii} = (M_D N)_{ii},$$

qui nous donne un système de quatre équations :

$$N_{i4} + N_{i3} = \frac{m_Z (\cos \beta - \sin \beta)}{m_{\chi_i} + \mu} (N_{i2} \cos \theta_W - N_{i1} \sin \theta_W), \quad (9.14)$$

$$N_{i4} - N_{i3} = -\frac{m_Z (\cos \beta + \sin \beta)}{m_{\chi_i} - \mu} (N_{i2} \cos \theta_W - N_{i1} \sin \theta_W), \quad (9.15)$$

$$N_{i1} (m_{\chi_i} - M_1) = m_Z \sin \theta_W (N_{i4} \sin \beta - N_{i3} \cos \beta), \quad (9.16)$$

$$N_{i2} (m_{\chi_i} - M_2) = -m_Z \cos \theta_W (N_{i4} \sin \beta - N_{i3} \cos \beta). \quad (9.17)$$

Les équations (9.14) et (9.15) sont utilisées pour calculer le couplage $\chi\chi Z$:

$$N_{i4}^2 - N_{i3}^2 = -(N_{i2} \cos \theta_W - N_{i1} \sin \theta_W)^2 \frac{m_Z^2 \cos 2\beta}{m_{\chi_i}^2 - \mu^2}.$$

Désormais, nous insérons dans l'équation précédente les définitions de N_{i1} (9.16) et N_{i2} (9.17) pour avoir une forme qui se rapproche de la relation recherchée (9.12) :

$$\begin{aligned} N_{i4}^2 - N_{i3}^2 &= (N_{i2} \cos \theta_W - N_{i1} \sin \theta_W) (N_{i4} \sin \beta - N_{i3} \cos \beta) \\ &\times \frac{m_Z^3 \cos 2\beta}{m_{\chi_i}^2 - \mu^2} \left(\frac{\cos^2 \theta_W}{m_{\chi_i} - M_2} + \frac{\sin^2 \theta_W}{m_{\chi_i} - M_1} \right). \end{aligned} \quad (9.18)$$

Il est possible de remarquer que, par rapport à l'équation (9.18), nous n'avons pas le bon signe relatif entre N_{i4} et N_{i3} dans le membre de droite de l'équation (9.18). Ceci provient du fait que dans la matrice de masse, n'intervient que le couplage $\chi\chi h$ et non $\chi\chi G$ comme dans la relation (9.12). Il est donc nécessaire de restaurer le bon signe, en espérant que cette manipulation nous permettra de retrouver la relation (9.12). Dans ce but, nous utilisons de nouveau les équations (9.14) et (9.15) pour extraire une définition de N_{i4} et N_{i3} :

$$\begin{aligned} N_{i3} &= m_Z (N_{i2} \cos \theta_W - N_{i1} \sin \theta_W) \frac{m_{\chi_i} \cos \beta + \mu \sin \beta}{m_{\chi_i}^2 - \mu^2}, \\ N_{i4} &= -m_Z (N_{i2} \cos \theta_W - N_{i1} \sin \theta_W) \frac{m_{\chi_i} \sin \beta + \mu \cos \beta}{m_{\chi_i}^2 - \mu^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous trouvons la relation suivante :

$$\frac{N_{i4} \sin \beta + N_{i3} \cos \beta}{N_{i4} \sin \beta - N_{i3} \cos \beta} = \frac{m_{\chi_i} + \mu \sin 2\beta}{m_{\chi_i} \cos 2\beta},$$

qui nous permet d'écrire :

$$N_{i4}^2 - N_{i3}^2 = (N_{i2} \cos \theta_W - N_{i1} \sin \theta_W) (N_{i4} \sin \beta + N_{i3} \cos \beta) \\ \times \frac{m_Z^3 (m_{\chi_i} + \mu \sin 2\beta)}{m_{\chi_i} (m_{\chi_i}^2 - \mu^2)} \left(\frac{\cos^2 \theta_W}{m_{\chi_i} - M_2} + \frac{\sin^2 \theta_W}{m_{\chi_i} - M_1} \right).$$

Cette relation, d'apparence complexe, se simplifie en utilisant le polynôme caractéristique de l'équation de diagonalisation de la matrice de masse (7.4), de manière à donner l'équation cherchée (9.12). Ainsi, la validité des relations nécessaires à l'indépendance de jauge a été prouvée. Il faut noter que ces relations proviennent explicitement de la diagonalisation de la matrice de masse. Nous pouvons cependant nous demander s'il n'y a pas une manière plus subtile de démontrer cette équation.

9.3 Matrice de masse et invariance de jauge

En partant toujours de la relation de diagonalisation (7.4) :

$$(NMN^{-1})_{ij} = \delta_{ij} m_i,$$

nous pouvons insérer un opérateur hermitique P quelconque dans l'équation précédente :

$$(m_i + m_j) (NPN^{-1})_{ij} = (N (M^\dagger P + PM) N^{-1})_{ij}. \quad (9.19)$$

Il est possible de remarquer que si nous prenons pour P , la matrice qui change le signe d'un higgsino par rapport à l'autre :

$$P = T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour M , la matrice de masse usuelle, la relation précédente (9.19) est exactement la relation nécessaire pour l'indépendance de jauge (9.13). Ce phénomène peut s'expliquer par la structure par bloc de la matrice de masse :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

avec :

- A une matrice 2×2 diagonale pour prendre en compte l'aspect Majorana des jauginos,
- B une matrice 2×2 antidiagonale pour refléter le caractère Dirac des higgsinos qui sont chargés sous $SU(2)$,
- C une matrice 2×2 de déterminant nul qui provient du fait, que la combinaison neutre de A et W_3 reste sans masse.

Donc la relation recherchée provient de la définition même de la matrice de masse, elle-même construite à partir d'un lagrangien invariant de jauge. Il est maintenant aisé de remarquer que le couplage $\chi\chi Z$ est une empreinte du caractère Dirac des higgsinos, eux-mêmes chargés sous $SU(2)$, alors que le neutralino est un spineur de Majorana. Ainsi, même lorsque la combinaison neutre d'isospin est considérée pour construire une particule de Majorana, une trace du caractère Dirac des higgsinos reste.

9.4 Borne d'unitarité

À haute énergie, grâce au théorème optique, le comportement de la section efficace est connu. Il doit aller comme $1/s$, ce qui signifie que l'amplitude carrée doit être une constante. Or nous pouvons extraire des amplitudes à vitesse non nulle les comportements suivants [89] :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z \propto \sqrt{s}/m_\chi,$$

alors que :

$$A(\chi\chi \rightarrow t\bar{t})_Z \propto m_t/m_\chi.$$

Ainsi, il est évident qu'à haute énergie le canal Zh via Z viole l'unitarité, alors que ce n'est pas le cas pour le canal $t\bar{t}$ via Z (ce que nous avons déjà mis en évidence dans le chapitre précédent). Il est enfin possible de mettre une définition au terme "mauvais comportement" déjà utilisé. Or ce genre de problème d'unitarité est déjà connu pour être présent dans le modèle standard. La solution arrive par l'addition de différentes voies. Ainsi, lorsque nous nous intéressons à des sections efficaces polarisées, le singlet $t\bar{t}$ peut s'annihiler en un boson Z et un scalaire de HEB. Une annihilation entre échange de Z en voie s et de top en voie t doit être réalisée. Cette suppression entre canaux, bien que plus simple ne paraît pas triviale non plus. Cependant, l'existence du canal s présuppose une brisure spontanée de symétrie, impliquant des relations entre couplages de Yukawa et couplage au boson de jauge. Ainsi les deux canaux $g\frac{1}{m_Z^2}gm_Z \propto g\frac{1}{m_t}y$ sont proportionnels au rapport $g/\langle h \rangle$ et peuvent ainsi s'annuler. La complication pour les neutralinos provient des termes de masse issus à la fois de la brisure électrofaible, ainsi que de la brisure de supersymétrie via des termes doux.

Afin de mieux cerner le problème avec les neutralinos, nous utiliserons la méthode dite "pinch" [6, 14, 15]. Pour simplifier les choses, nous travaillerons dans la jauge de Feynman : $\xi = 1$. Dans cette jauge, le propagateur du boson Z est purement transverse, donc exempt de tout problème d'unitarité à haute énergie. Ainsi, les diagrammes divergents seront : échange de Goldstone en voie s et échange de neutralino en voie t.

Nous commençons par travailler sur le diagramme avec échange de Goldstone. En jauge de Feynman, l'amplitude (9.9) devient :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_G = C_{\chi\chi}^G C_G (\bar{\chi}(p') \gamma_5 \chi(p)) \frac{(q+k')^\mu}{q^2 - m_Z^2} \varepsilon^\mu(k).$$

Une fois dans la limite de haute énergie (8.21), nous avons pour la cinématique :

$$\left. \begin{array}{l} q = k + k' \\ k = q - k' \end{array} \right\} \Rightarrow (q+k')k = q^2 - m_h^2.$$

Nous obtenons donc :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_G = C_{\chi\chi}^G C_G (\bar{\chi}\gamma_5\chi) \left(1 + \frac{m_Z^2 - m_h^2}{q^2 - m_Z^2}\right).$$

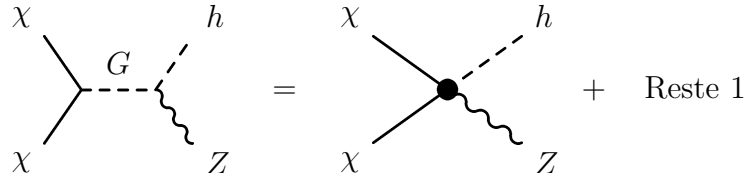
En utilisant la définition des couplages, l'amplitude précédente se réécrit :

$$\begin{aligned}
A(\chi\chi \rightarrow Zh)_G &= \frac{ig^2}{2\cos^2\theta_W m_Z} (c_W N_{12} - s_W N_{11}) \\
&\times (s_\beta N_{14} + c_\beta N_{13}) (\bar{\chi}\gamma_5\chi) \left(1 + \frac{2m_Z^2 - m_h^2}{q^2 - m_Z^2}\right), \quad (9.20)
\end{aligned}$$

si la relation due à l'invariance de jauge de la matrice de masse (9.11) est utilisée, l'équation précédente nous donne :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_G = \frac{-ig^2}{\cos^2\theta_W} O_{11}^Z \frac{m_\chi}{m_Z^2} (\bar{\chi}\gamma_5\chi) \left(1 + \frac{2m_Z^2 - m_h^2}{q^2 - m_Z^2}\right). \quad (9.21)$$

À partir de l'équation précédente, il est possible séparer le terme divergent à haute énergie. En effet, le premier terme de (9.21) se comporter comme $A \simeq \sqrt{s} = \sqrt{q^2}$, divergent à haute énergie, alors que le second terme possèdera le bon comportement grâce à la présence du propagateur du Goldstone. La manipulation précédente sur l'algèbre peut être visualisée de manière diagrammatique :



Explorons maintenant ce qui se passe pour l'échange de neutralinos en voie t :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_\chi = -2i \sum_{i=1}^4 \frac{C_{1i}^A C_{1i}^h}{Q^2 - m_{\chi_i}^2} (\bar{\chi}(p') (Q + m_{\chi_i}) \gamma^\mu \gamma_5 \chi(p)) \frac{k_\mu}{m_Z},$$

le facteur deux devant la somme provient des deux orientations possibles pour la ligne fermionique intérieure, pour prendre en compte le caractère Majorana du neutralino. Cette fois la dynamique du diagramme est défini par :

$$\begin{aligned}
p &= k + Q, \\
p' &= k' + Q.
\end{aligned}$$

Ainsi l'amplitude peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned}
A(\chi\chi \rightarrow Zh)_\chi &= \frac{-2i}{m_Z} \sum_{i=1}^4 \frac{C_{A\ 1i} C_{h\ 1i}}{Q^2 - m_{\chi_i}^2} \{ \bar{\chi}(Q + m_{\chi_i}) \\
&\times (\not{p} - m_\chi - (Q - m_{\chi_i}) - m_{\chi_i} + m_\chi) \gamma_5 \chi \},
\end{aligned}$$

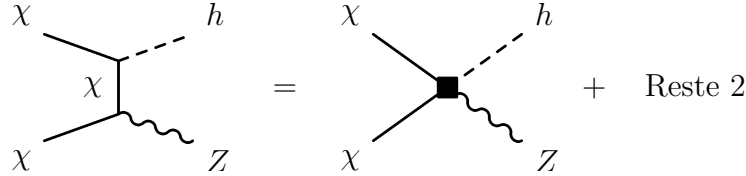
qui, après réarrangement, donne :

$$\begin{aligned}
A(\chi\chi \rightarrow Zh)_\chi &= \frac{-2i}{m_Z} \sum_{i=1}^4 \frac{C_{A\ 1i} C_{h\ 1i}}{Q^2 - m_{\chi_i}^2} \{ (\bar{\chi}(Q + m_{\chi_i}) (\not{p} - m_\chi) \gamma_5 \chi) \\
&\quad - (\bar{\chi}(Q + m_{\chi_i}) (Q - m_{\chi_i}) \gamma_5 \chi) \\
&\quad + (\bar{\chi}(Q + m_{\chi_i}) (m_\chi - m_{\chi_i}) \gamma_5 \chi) \}. \quad (9.22)
\end{aligned}$$

Nous ne nous intéressons qu'à des amplitudes sur couche de masse, ainsi la troisième ligne de l'équation précédente (9.22) disparaît pour nous laisser l'expression suivante :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_\chi = \frac{-i}{2\cos^2\theta_W} \sum_{i=1}^4 \frac{O_{1i}^Z O_{1i}^h}{m_Z} \left\{ \bar{\chi} \gamma_5 \chi - \frac{m_\chi - m_{\chi_i}}{Q^2 - m_{\chi_i}^2} (\bar{\chi} (\not{Q} + m_{\chi_i}) \gamma_5 \chi) \right\}. \quad (9.23)$$

Comme précédemment cette équation peut être vue sous forme diagrammatique :



Ainsi à partir de (9.20) et (9.23), nous devons avoir l'égalité suivante :

$$\sum_i O_{1i}^Z O_{1i}^h = \frac{1}{2} O_{11}^G,$$

qui, compte tenu des définitions des différents couplages, s'écrit :

$$(c_W N_{12} - s_W N_{11}) (s_\beta N_{14} + c_\beta N_{13}) = \sum_{i=1}^4 \{ (N_{14} N_{i4} - N_{13} N_{i3}) \times ((c_W N_{12} - s_W N_{11}) (N_{i4} s_\beta - N_{i3} c_\beta) + (c_W N_{i2} - s_W N_{i1}) (N_{14} s_\beta - N_{13} c_\beta)) \}. \quad (9.24)$$

Cette égalité est requise pour que la théorie reste unitaire à haute énergie. Nous pouvons remarquer que cette équation d'apparence compliquée devient une tautologie quand la condition d'unitarité des matrices de mélanges est utilisée :

$$N_{ij} N_{kj} = \delta_{ik}.$$

Alors l'unitarité à haute énergie requiert l'unitarité de la matrice de mélange.

9.5 Extraction du reste

Dans la section précédente, nous avons extrait des relations entre les couplages à partir de la condition d'unitarité (9.24) et de l'invariance de jauge (9.11). Si ces identités sont regroupées, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\sum_i O_{1i}^Z O_{1i}^h = -\frac{m_\chi}{m_Z} O_{11}^Z,$$

dont la complexité peut être montrée explicitement :

$$\begin{aligned} (N_{i4}^2 - N_{i3}^2) \frac{m_\chi}{m_Z} &= -\sum_{i=1}^4 (N_{14} N_{i4} - N_{13} N_{i3}) \\ &\times \{ (c_W N_{12} - s_W N_{11}) (s_\beta N_{i4} - c_\beta N_{i3}) \\ &+ (c_W N_{i2} - s_W N_{i1}) (s_\beta N_{14} + c_\beta N_{13}) \}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Cette identité relie les couplages présents dans l'amplitude du diagramme avec médiation de boson Z (7.15), à ceux du diagramme avec échange de neutralinos (7.16) .

Cette relation nous permet, comme nous l'avons supposé auparavant (8.4), d'écrire l'amplitude (7.16) sous la forme :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh)_\chi = i2\sqrt{2}\beta_{Zh} \frac{m_\chi}{m_Z} \frac{g^2}{\cos^2\theta_W} \left(\frac{m_\chi}{m_Z} O_{11}^Z + \sum_{i=1}^4 R_i \right) \quad (9.26)$$

avec :

$$R_i = \frac{O_{1i}^Z O_{1i}^h (2m_{\chi_i} m_\chi - 4m_\chi^2 - 2m_{\chi_i}^2 + m_h^2 + m_Z^2)}{2m_\chi^2 + 2m_{\chi_i}^2 - m_h^2 - m_Z^2}. \quad (9.27)$$

Ainsi nous comprenons bien que le premier terme de (9.26) annule exactement l'amplitude (7.15). Ceci explique de manière inambiguë pourquoi regarder seulement le canal Zh via Z s'avère totalement faux.

Le problème non élucidé est de comprendre pourquoi ce reste est sous-dominant :

$$\sum_i R_i \ll m_\chi m_t / m_Z^2.$$

Nous avons montré, en utilisant la théorie des perturbations, qu'effectivement ce reste semblait d'ordre m_Z/m_χ , ce qui sera vérifié de manière exacte en utilisant une étude systématique de la série des perturbations.

9.6 Étude du terme restant après annulation

Avec la théorie des perturbations, nous cherchons à résoudre l'équation suivante :

$$(M_o + W)_{ij} N_{jl}^T = N_{il}^T m_l, \quad (9.28)$$

avec un développement en puissance de m_Z/m_χ des valeurs et vecteurs propres :

$$m_i = m_i^0 + m_i^1 + \dots \quad (9.29)$$

$$N = N^0 + N^1 + \dots \quad (9.30)$$

Ici, nous supposons que les vecteurs perturbés sont orthogonaux aux vecteurs non perturbés. La normalisation des vecteurs perturbés ne sera pas prise en compte, ceci ne modifiant pas les propriétés de l'analyse faite ici. À partir du système (9.28), la relation suivante peut être extraite :

$$(N^0 N^{qT})_{pn} = \frac{(N^0 W N^{q-1T})_{pn}}{m_n^0 - m_p^0} - \sum_{j=1}^{q-1} m_n^j \frac{(N^0 N^{q-jT})_{pn}}{m_n^0 - m_p^0}.$$

Cette dernière relation nous permet d'exprimer le vecteur perturbé d'ordre q comme :

$$N_{in}^{qT} = \sum_{p \neq n} \left(\frac{(N^0 W N^{q-1T})_{pn}}{m_n^0 - m_p^0} - \sum_{j=1}^{q-1} m_n^j \frac{(N^0 N^{q-jT})_{pn}}{m_n^0 - m_p^0} \right) N_{ip}^{0T}. \quad (9.31)$$

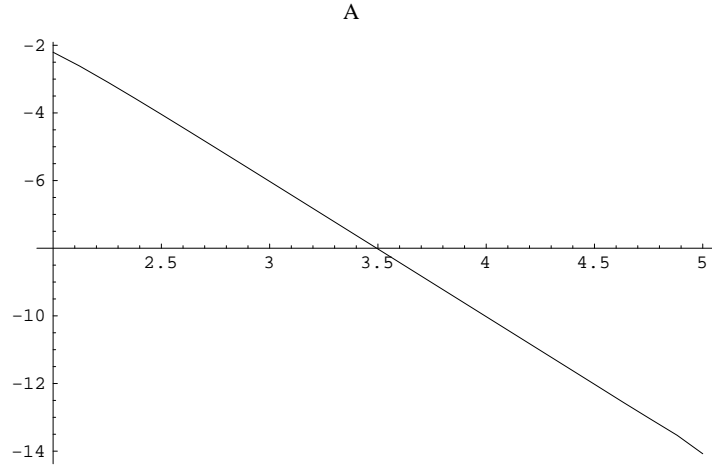


FIG. 9.1 – $\frac{\sigma(\chi\chi \rightarrow Zh)_{Z+\chi}}{\sigma(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z}$ en fonction de M_1 avec $\mu = 3M_1$

De la même manière, les valeurs propres s'écrivent :

$$m_i^q = (N^0 W N^{q-1T})_{ii}. \quad (9.32)$$

Finalement un système de deux équations inhomogènes (9.31) et (9.32) est obtenu. Ce système peut être calculé par récurrence. Nous avons déjà effectué les calculs pour $q = 0$, et $q = 1$ dans la section 8.4.

La structure des différents éléments doit être rappelée : M_0 est une matrice diagonale par blocs, tout comme N^0 , alors que W et N^1 sont antidiagonales par blocs. Par récurrence, nous remarquons que N^q sera diagonale par blocs si q est pair et antidiagonale par bloc si q est impair. À cause de cette structure, m_i^q sera non nul seulement pour q pair. De plus, q est la puissance de m_Z dans le développement. D'autrepart, le facteur de normalisation sera de type N^2 , donc automatiquement analytique en m_Z^2 . Par conséquent, m_i sera une fonction analytique de m_Z^2/m_χ^2 . La partie diagonale par blocs de N admettra un développement en puissance paires de m_Z/m_χ , et la partie antidiagonale, un développement en puissances impaires.

Ainsi par une analyse consciencieuse, il est possible de montrer que A_Z , tout comme A_χ , possédera un développement en puissances paires de m_Z/m_χ . Dans le chapitre sur les perturbations, il a été mis en évidence la suppression exacte à l'ordre zéro, donc le terme suivant sera en m_Z^2/m_χ^2 , qui sera donc supprimé par rapport à m_t/m_χ . Finalement, le phénomène de suppression du canal Zh est compris, ainsi que l'ordre de grandeur du terme restant. Le travail précédent peut être résumé par les inégalités suivantes :

$$A(\chi\chi \rightarrow Zh) \propto \frac{m_Z^2}{m_\chi^2} \ll A(\chi\chi \rightarrow t\bar{t}) \propto \frac{m_t}{m_\chi} \ll A(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z \propto 1.$$

Donc, le comportement du rapport suivant est connu :

$$\frac{\sigma(\chi\chi \rightarrow Zh)_{Z+\chi}}{\sigma(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z} \propto \frac{m_Z^4}{M_1^4},$$

ce qui est visible sur la figure (9.1) où le coefficient directeur de la suppression est -4 .

Chapitre 10

Effets de la polarisation des W sur les spectres de positrons et de neutrinos

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes intéressés seulement à la désintégration de neutralinos en Zh . Cette étude nous a permis de noter l'importance de la faible vitesse des neutralinos sur la polarisation des bosons de jauge émis. Or, sur la figure (7.1), nous remarquons que les bosons W ont, *a priori*, un spectre plus dur, donc potentiellement plus important pour la détection indirecte de MN. Ce spectre a été obtenu par le code DarkSusy qui calcule les sections efficaces d'annihilation de neutralinos dans les différents canaux. Cependant, pour les calculs de désintégration des produits d'annihilation, les cascades et l'hadronisation des quarks, ce code dispose de tables générées à partir de Pythia, utilisant des méthodes de Monte Carlo. Toutefois, Pythia ne calcule que des processus non polarisés. Alors, nous pouvons nous interroger sur l'importance des effets dûs à la polarisation des W qui n'ont pas été pris en compte.

Sommaire

10.1 Polarisation des W	85
10.2 Effets de la polarisation des W sur le spectre	88
10.3 Conclusion	90

10.1 Polarisation des W

Avant de discuter de la polarisation des W , il est important de faire quelques rappels sur la qualification des spectres mous ou durs. Ces notions sont relatives, néanmoins nous pouvons qualifier un spectre de “dur” lorsqu’il est plat ou de pente positive, c’est le cas pour l’annihilation de neutralinos en une paire de W , lorsque ceux-ci se désintègrent directement en une paire neutrino-lepton chargé. Un spectre sera “mou” lorsque sa pente aura un coefficient directeur négatif, comme pour des produits d’annihilation donnant des neutrinos ou des positrons (suivant le type de détecteur auquel on va s’intéresser) *via* des désintégrations en trois corps (comme pour les τ) ou bien lors d’une cascade de désintégration (phénomène d’hadronisation). Plus le spectre sera dur, et plus il sera facile de remonter à la masse des neutralinos. D’autre part, la dureté du spectre renforce l’alignement neutrino-muon, lors de la conversion d’un neutrino en muon. Or dans les télescopes à neutrinos, seule la lumière Cerenkov émise par le muon est observée. Ainsi, la dureté du spectre et donc l’alignement muon-neutrino, permettra un rejet des neutrinos

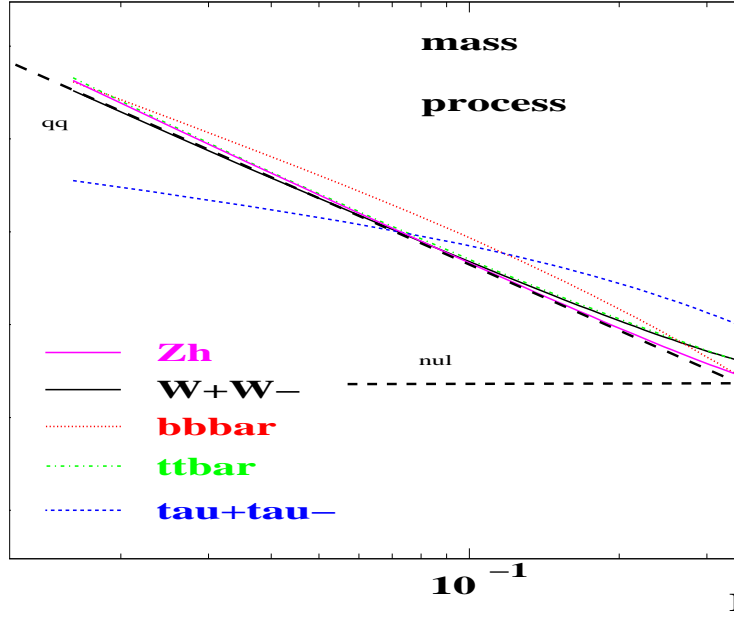


FIG. 10.1 – Flux différentiel de neutrinos pour les principaux canaux de désintégration provenant de l’annihilation de neutralinos. Les normalisations (dépendant des rapports de branchements) sont arbitrairement choisies, de manière à faciliter la comparaison des formes de tous les canaux. Comme sur la figure (7.1), le spectre d’annihilation en Zh est corrigé en tenant compte de la polarisation du Z , tandis que le spectre pour la pair de W ne tient pas encore compte d’une polarisation éventuelle des W .

atmosphériques.

Il est important de noter que sur la figure (7.1), deux régimes distincts dans le spectre d’annihilation de neutralinos en WW peuvent être séparés. Cette séparation est faite de manière schématique sur la figure (10.1). La première partie qui est en pente descendante, provient de l’hadronisation : $WW \rightarrow q\bar{q} \rightarrow \nu + X$ où X est un hadron, alors que la deuxième partie, qui est “dure”, résulte de la désintégration leptonique des bosons de jauge. Par conséquent sur un même spectre, on peut avoir une partie dure et une partie douce. Ces observations préliminaires s’avèreront nécessaires lors de la discussion de ces spectres pour des expériences d’astronomie avec des neutrinos.

La problématique de la polarisation à haute énergie, rencontrée dans le cas d’annihilation de neutralino en un boson de jauge et un scalaire, devrait être complètement différente dans le cas d’annihilation en deux bosons de jauge. Cependant, nous savons que les bosons produits doivent être transverses [19]. Afin d’éviter une analyse complète de chaque diagramme, nous choisissons dans cette section une étude basée sur la conservation de nombres quantiques pertinents. Il est important de noter que nous négligeons des effets possibles de violation de CP dans les matrices de masse des charginos et des neutralinos. Dans ces conditions, la condition de Majorana (B.12) combinée à la valeur propre d’un fermion de Majorana sous opération de parité (B.20), nous apprend que le système initial est état propre de CP avec la valeur $CP = -1$, pour des particules de Majorana identiques dans l’onde s . De plus, on a déjà noté que le moment angulaire total devait être nul : $J = 0$. Il faut à présent comprendre l’état de CP de l’état final.

Tout d’abord, il convient de remarquer que les bosons W ne sont pas états propres de C , ni de P . Cependant l’état de CP d’un système de deux bosons de jauge est lui déterminé. Il est nécessaire de commencer par rechercher quelle est la parité orbitale d’un système de deux bosons. De manière générale, les états propres de moment orbital de

deux particules sont définis par leur projection sur les états $|W^+(\vec{k}, \sigma_3)W^-(-\vec{k}, \sigma'_3)\rangle$ où σ_3, σ'_3 sont les projections du spin des bosons de jauge suivant une direction quelconque. L'angle entre cette direction et la direction de propagation du W^+ est donnée par sa tri-impulsion \vec{k} , qui définit l'angle solide Ω . La projection sus-mentionnée s'écrit :

$$|W^+W^-, E, L, M, S, \Sigma_3\rangle = \int d\Omega Y_L^M(\Omega) |W^+(\vec{k}, \sigma_3)W^-(-\vec{k}, \sigma'_3)\rangle, \quad (10.1)$$

avec E, L, M, S et Σ_3 respectivement l'énergie, le moment orbital, la projection du moment orbital, le spin et la projection du spin de l'état final. Les fonctions Y_L^m sont les harmoniques sphériques. Il est donc possible de déduire de la relation précédente que :

$$P|W^+W^-, E, L, M, S, \Sigma_3\rangle = (-1)^L \eta_p^2(W) |W^+W^-, E, L, M, S, \Sigma_3\rangle.$$

Par conséquent, la parité de l'état final est donnée par le moment orbital relatif L *via* la valeur propre $(-1)^L$.

Pour ce qui est de la conjugaison de charge, le système est considéré dans un état propre du moment angulaire :

$$|W^+W^-, E, L, M, S, \Sigma_3\rangle = \sum_{\sigma_3} \int d\Omega Y_L^M(\Omega) \langle 1, \sigma_3; 1, \sigma'_3 | S, \Sigma_3 \rangle |W^+(\vec{k}, \sigma_3)W^-(-\vec{k}, \sigma'_3)\rangle.$$

L'angle solide $-\Omega$ désigne ici la direction $(\pi - \theta, \pi + \phi)$. La transformation par conjugaison donne :

$$|W^-W^+, E, L, M, S, \Sigma_3\rangle = \sum_{\sigma_3} \int d\Omega Y_L^M(\Omega) \langle 1, \sigma_3; 1, \sigma'_3 | S, \Sigma_3 \rangle |W^-(\vec{k}, \sigma_3)W^+(-\vec{k}, \sigma'_3)\rangle.$$

La deuxième intégrale se ramène à la première par la succession de changements suivants :

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow -\Omega, \\ Y_L^M(-\Omega) &= (-1)^L Y_L^M(\Omega), \\ \langle 1, \sigma_3; 1, \sigma'_3 | S, \Sigma_3 \rangle &= (-1)^S \langle 1, \sigma'_3; 1, \sigma_3 | S, \Sigma_3 \rangle. \end{aligned}$$

D'autre part pour des champs bosoniques, la propriété de commutation suivante est connue :

$$|W^+(\vec{k}, \sigma_3)W^-(-\vec{k}, \sigma'_3)\rangle = |W^-(-\vec{k}, \sigma'_3)W^+(\vec{k}, \sigma_3)\rangle.$$

Il en résulte que :

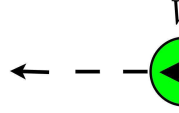
$$C|W^+W^-, E, L, M, S, \Sigma_3\rangle = (-1)^{L+S} |W^-W^+, E, L, M, S, \Sigma_3\rangle.$$

Alors l'opération de conjugaison de charge du système de deux bosons conjugués nous donne un facteur $(-1)^J$. Par conséquent, l'état final doit être état propre de CP tel que :

$$CP(\text{état final}) = \eta_{CP}^2(W)(-1)^{2L+S}.$$

Si la conservation du moment angulaire total est prise en compte, nous obtenons :

$$J = L + S = 0, \quad (10.2)$$

FIG. 10.2 – Cinématique de l'annihilation de neutralino au repos en une paire de W .

et donc :

$$CP(\text{état final}) = (-1)^L.$$

Ainsi, pour avoir conservation de la symétrie CP , l'état final doit être dans l'onde $p : L = 1$. Connaissant cette contrainte, l'équation (10.2) implique que le spin total S du système final doit valoir 1. Donc, nous avons deux possibilités pour assurer cette configuration : la combinaison antisymétrique des états $|\uparrow\downarrow\rangle$ et $|\downarrow\uparrow\rangle$, celle de $|\downarrow 0\rangle$ et $|0 \downarrow\rangle$ ou encore de $|\uparrow 0\rangle$ et $|0 \uparrow\rangle$. Cependant la projection du spin dans la direction de propagation des W doit être nul, ce qui s'écrit $s_Z = 0$. Ainsi les états finaux contenant des bosons W longitudinaux sont interdits.

10.2 Effets de la polarisation des W sur le spectre

Il est possible de réaliser un développement en amplitude d'hélicité de la désintégration d'un boson W dans son référentiel de repos, en une paire neutrino-lepton chargé par la formule suivante¹ :

$$A_{m_\nu, m_l}^{m_W}(\theta_{CM}, \phi) = a_{m_\nu, m_l} d_{m_W, m_{n_u} + m_l}^{(1)}(\theta_{CM}) e^{im_W \phi},$$

où m_W , m_ν et m_l sont respectivement les projections du spin des différentes particules sur l'axe Oz , lui-même défini par l'axe du spin du W . La matrice $d^{(1)}$ de rotation d'un spin un est donnée par :

$$d^{(1)}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta & \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta & \cos \theta & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta & \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \end{pmatrix},$$

avec les lignes et les colonnes rangées dans l'ordre : $m = 1, 0, -1$. Ainsi le comportement de la désintégration de bosons de jauge polarisés transversalement, dans leurs référentiels de repos est donné par :

$$\begin{aligned} A_{\uparrow\uparrow}^1 &= \frac{e^{i\phi}}{2} (a_{\uparrow\uparrow}(1 + \cos \theta_{CM}) + a_{\downarrow\downarrow}(1 - \cos \theta_{CM})), \\ A_{\downarrow\downarrow}^{-1} &= \frac{e^{-i\phi}}{2} (a_{\uparrow\uparrow}(1 - \cos \theta_{CM}) + a_{\downarrow\downarrow}(1 + \cos \theta_{CM})). \end{aligned}$$

¹la cinématique de la réaction est présentée sur la figure (10.2)

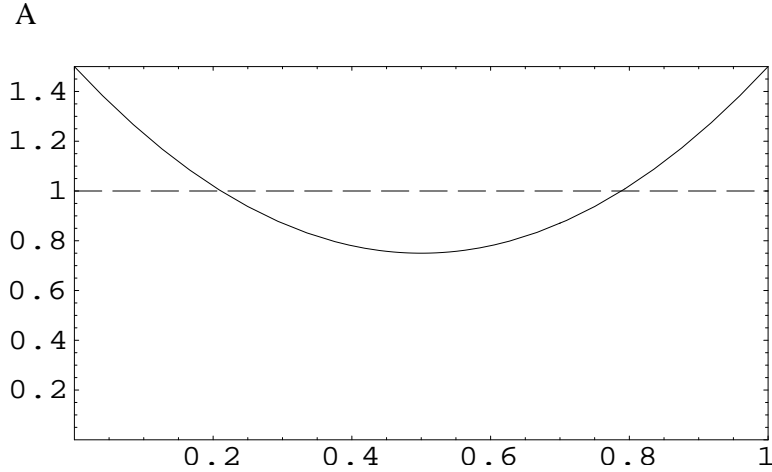


FIG. 10.3 – Section efficace fonction de $x = (1 + \cos \theta_{CM})/2$ pour des W transverses (ligne noire), et pour des W non polarisés (pointillés).

Par un calcul de désintégration du boson W en νl suivant le raisonnement de la section (8.1), nous trouvons que seul $a_{\uparrow\uparrow}$ est non nul, d'après les propriétés de chiralité d'un neutrino, ce qui implique :

$$A(W_{\perp} \rightarrow \nu l) \sim 1 \pm \cos \theta_{CM},$$

avec le signe $+$ pour un W ayant son spin aligné avec sa direction de propagation et un signe $-$ pour un W ayant son spin orienté en sens inverse.

Ainsi le taux de désintégration, proportionnel à la section efficace :

$$\Gamma = |A_+|^2 + |A_-|^2,$$

doit aller comme $x^2 + (1 - x)^2$, avec $x = E_{\nu}/E_W = (1 + \cos \theta_{CM})/2$, après la transformation de Lorentz dans la direction d'émission du boson W . À partir de la figure (10.3), les effets de la polarisation des W sur la forme du spectre de désintégration des W sont évidents. Alors le spectre d'annihilation de neutralinos en W sera plus dur que prévu, ce qui constitue une nouvelle intéressante. Cependant, les spectres intégrés seront les mêmes pour des sections efficaces polarisées et non polarisées. Donc, d'un point de vue expérimental, pour une expérience qui n'a pas encore acquis assez de statistique, nous n'aurons pas accès à la forme précise du spectre où une différence nette pourrait être visible. Mais la seule donnée pertinente sera le spectre intégré, où la donnée de la polarisation n'est elle, pas pertinente....

Puisque que nous nous intéressons à l'aspect expérimental, autant essayer de se placer dans un cas réaliste : la détection par un télescope à neutrino sous-marin de type Antares [2] par exemple. Il faut savoir que la perte d'énergie des muons dans l'eau en fonction de la distance est : $dE_{\mu}(x)/dx = 1\text{GeV}/5m$. Il convient alors de prendre en compte dans l'étude du spectre, la conversion du neutrino en muon. Dans un premier temps, il est intéressant de se concentrer sur les événements contenus, *i.e.* ceux dont la trace est entièrement contenue dans le volume instrumenté. Dans ce cas, la fonction Γ doit être pondérée par la probabilité de désintégration d'un neutrino en un muon, section efficace qui doit aller comme l'énergie du neutrino : E_{ν} . Donc, le spectre doit correspondre à $x\Gamma(x)$. Comme nous pouvons le constater sur la figure (10.4), le flux attendu devient plus important pour des énergies de neutrinos plus grandes (+50% à grand x), pour des bosons

transverses. Malgré cette nouvelle caractéristique, le taux intégré reste identique pour des W transverses et non polarisés, lorsque le seuil est en dessous de 0,5, c'est-à-dire lorsque le neutrino emporte moins de 50% de l'énergie du W .

À présent, on peut se demander, quel va être le changement dans les spectres pour des événements non-contenus? Le spectre prend alors un facteur de E_ν supplémentaire, puisque la désintégration du neutrino en muon n'a pas eu lieu dans le volume instrumenté. Comme toujours la figure (10.4) issue de ce nouveau spectre, présente une différence de forme nette entre W transverses et W non polarisés. Mais cette fois-ci, la différence dans les spectres intégrés est elle aussi visible (même si elle reste faible : inférieure à 5%) pour toutes les valeurs de seuil.

Ainsi, l'effet sur la forme des spectres considérés est important, alors que celui sur le taux intégré est négligeable. En outre, jusqu'à présent nous n'avons raisonné que sur la partie dure du spectre d'annihilation de neutralinos en WW , c'est-à-dire avec des W qui se désintègrent directement en νl . Il est temps de considérer le spectre total; c'est ce qui est fait sur la figure (10.5) pour les neutrinos et sur la figure (10.6) pour les positrons.

Pour conclure, nous pouvons dire que la donnée de la polarisation des W provenant de l'annihilation de neutralinos au repos, change la forme des spectres mais aussi la valeur des spectres intégrés, de manière fine mais observable pour une expérience qui maîtrise ses erreurs statistiques. Cependant, la résolution en énergie pour l'expérience Antares ne permettra jamais de rendre compte d'une pareille différence. D'autre part, le changement dans la forme du spectre, permettrait de montrer le caractère Majorana de la matière noire. Une telle découverte nous mettrait encore plus sur la voie de la CDM supersymétrique...

10.3 Conclusion

Dans toute cette partie, nous avons mis en évidence un problème non trivial pour le canal Zh . Après avoir souligné l'importance potentielle de ce canal pour la détection indirecte de matière noire, on a souligné la domination de celui-ci en voie s pour différents modèles ainsi que la suppression de ce canal, lorsque les différents diagrammes sont additionnés. Ceci nous a permis d'obtenir une condition pour avoir la suppression de manière exacte, à savoir la domination des termes de brisure supersymétrie sur ceux provenant de la brisure électrofaible.

Pour comprendre le phénomène mis en jeu, nous avons calculé l'amplitude polarisée dans le but de souligner la seule polarisation possible pour le boson de jauge Z : la polarisation longitudinale, quand les neutralinos sont au repos. Connaissant l'hypothèse permettant d'avoir la suppression, nous avons utilisé différents types de développement : développement de Taylor et théorie des perturbations. Ces développements ont été réalisés, dans le but de montrer le phénomène mis en cause : la suppression exacte à l'ordre zéro en m_Z/m_χ entre les deux voies du canal. Ainsi, il a été possible de suggérer une forme probable pour une décomposition de l'amplitude avec échange de neutralino en voie t , ainsi qu'une relation nécessaire pour l'annulation entre les constantes de couplages. Ensuite, nous avons travaillé sur l'extraction du mauvais comportement pour la voie s . Connaissant la propriété de polarisation du boson de jauge mais aussi l'hypothèse nécessaire à l'annulation, nous avons mis en évidence le rôle joué par la symétrie de jauge, ou plutôt l'indépendance de jauge.

Dans la partie suivante, nous avons vérifié de manière explicite l'indépendance de jauge, ce qui nous a permis de montrer la relation nécessaire entre matrice de mélanges

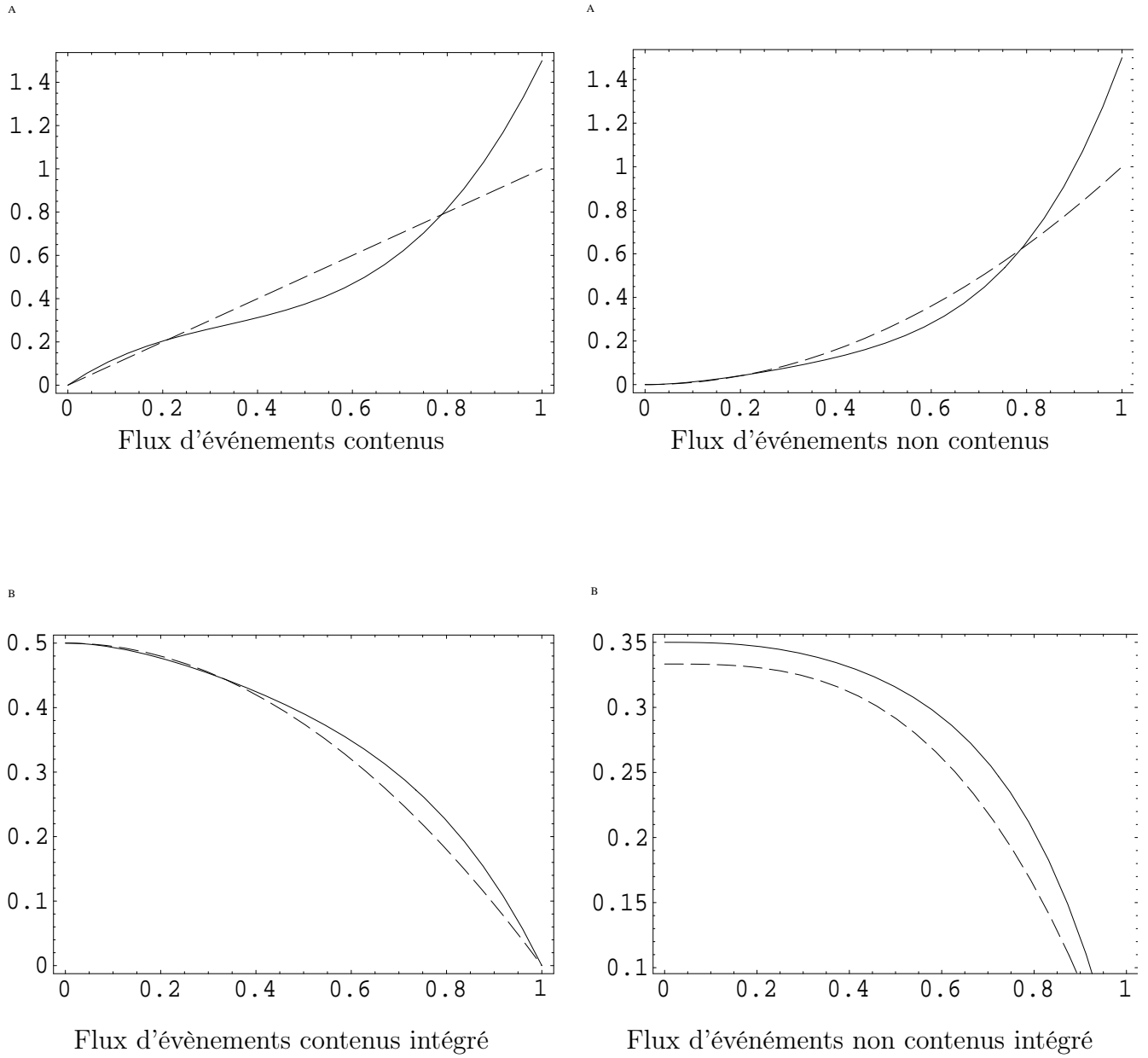


FIG. 10.4 – Flux d'événements pour la désintégration de bosons W transverses (ligne continue), et pour des W non polarisés (pointillés).

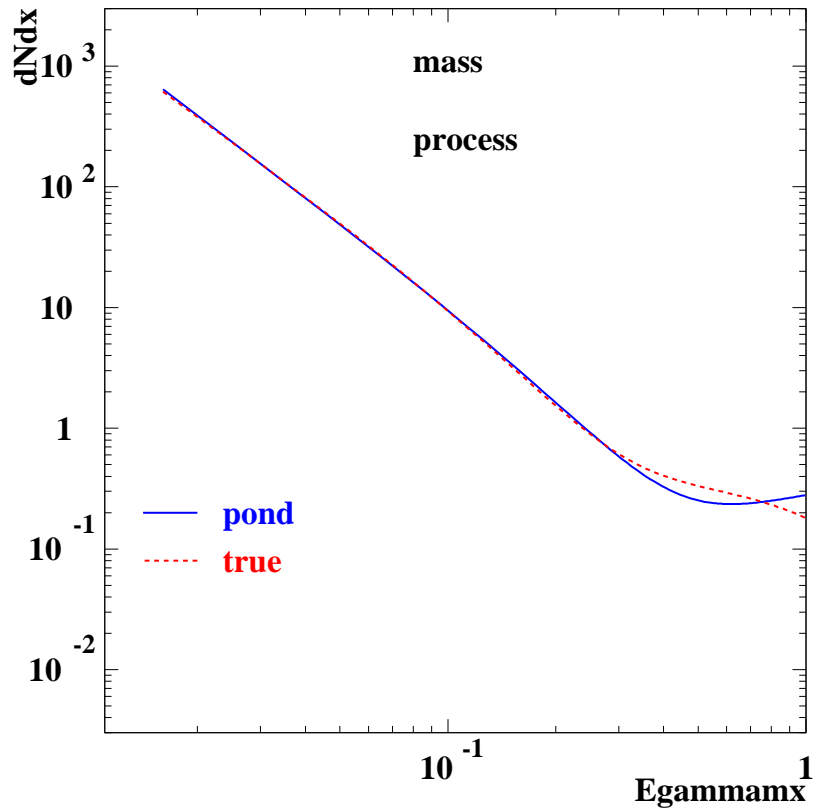


FIG. 10.5 – Flux différentiel de neutrinos pour la désintégration d'une paire de W provenant de l'annihilation de neutralinos.

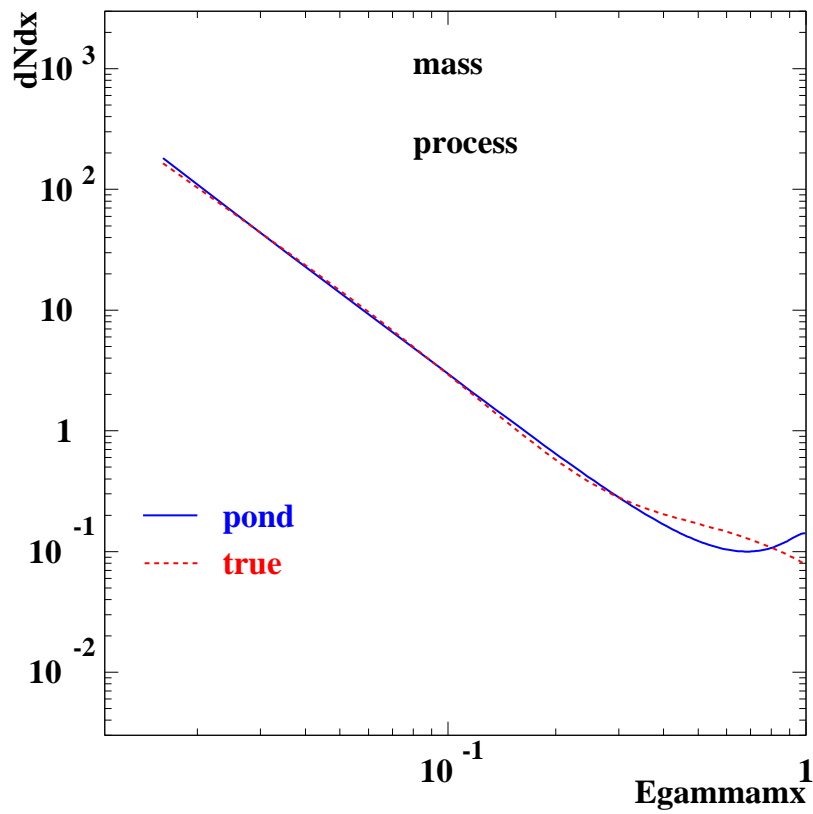


FIG. 10.6 – Flux différentiel de positrons pour la désintégration d'une paire de W provenant de l'annihilation de neutralinos.

et valeurs propres. Dans un premier essai, nous avons prouvé cette relation à partir de l'équation de diagonalisation de la matrice de masse, avant de trouver une démonstration plus subtile, mettant en évidence le lien entre invariance de jauge de la matrice de masse, isospin du higgsino et indépendance de jauge des voies en question. Ensuite nous avons souligné de manière qualitative, la violation de l'unitarité à haute énergie pour le processus Zh en voie s . Ce phénomène nous a permis d'extraire une deuxième relation, triviale, une fois l'unitarité de la matrice de mélange et la condition de découplage du pseudoscalaire A , utilisées. Puis, nous avons signalé la nécessité des deux relations précédentes, afin d'extraire la suppression du canal Zh , ainsi que l'existence d'un reste, dont l'analyse systématique en théorie des perturbations a prouvé qu'il était sous-dominant.

Enfin, riches de notre expérience sur les problèmes de polarisations de bosons de jauge issus d'annihilations de matière noire au repos, nous avons examiné le problème de l'annihilation de neutralinos en bosons W . Nous avons montré de manière précise que ces bosons devaient être transverses. Finalement, nous avons mis en évidence les différences dans la forme de spectres mais aussi pour les spectres intégrés, quand les W sont transverses. Suite à cette analyse, il semble possible pour une expérience possédant assez de statistique de discriminer la polarisation W . Cette donnée permettrait d'avoir, en plus de l'information sur la masse de la matière noire, une indication très précieuse sur la caractère Majorana ou Dirac de cette matière et donc peut-être, de nous mettre sur la voie de la matière noire supersymétrique.

D'un point de vue réaliste, il semble que l'expérience ANTARES, n'aura jamais la précision nécessaire pour espérer mettre en évidence l'effet de la polarisation des W . Cependant, on peut espérer que le recoupement de diverses expériences utilisant la détection de neutrino (IceCube, Amanda...) puissent nous permettre d'accéder à cette information. Pour ce qui est du spectre en positron (figure (10.6)), que nous n'avons pas encore discuté, se pose en plus le problème de la propagation de ces particules. Les positrons étant chargés, ils vont fortement interagir au cours de leur propagation, ce qui va modifier considérablement les spectres. L'effet de cette propagation est discuté dans [67], d'où est tirée la figure (10.7). L'analyse est faite pour de la MN issue de dimensions supplémentaires. Cependant, si on voulait reprendre cette analyse sur la propagation des positrons issus de l'annihilation de neutralinos, il faudrait prendre en compte la polarisation des W , ce qui permettrait d'ajuster les données de HEAT avec un "clump" plus loin. Or cette propriété semble plus réaliste.

Cette partie constitue une incursion dans le MSSM et toute sa complexité, due au nombre de paramètres beaucoup plus important que dans le modèle standard. On a pu déceler l'importance de l'invariance de jauge et de la condition d'unitarité pour la suppression du canal Zh dans un "fourbis" de couplages et de matrices de mélanges. Mais on a aussi pu extraire de l'information importante sur le canal WW directement utilisable pour l'analyse de données expérimentales. Enfin, on a pointé du doigt, la nécessité d'implémenter des processus polarisés dans le code PYTHIA.

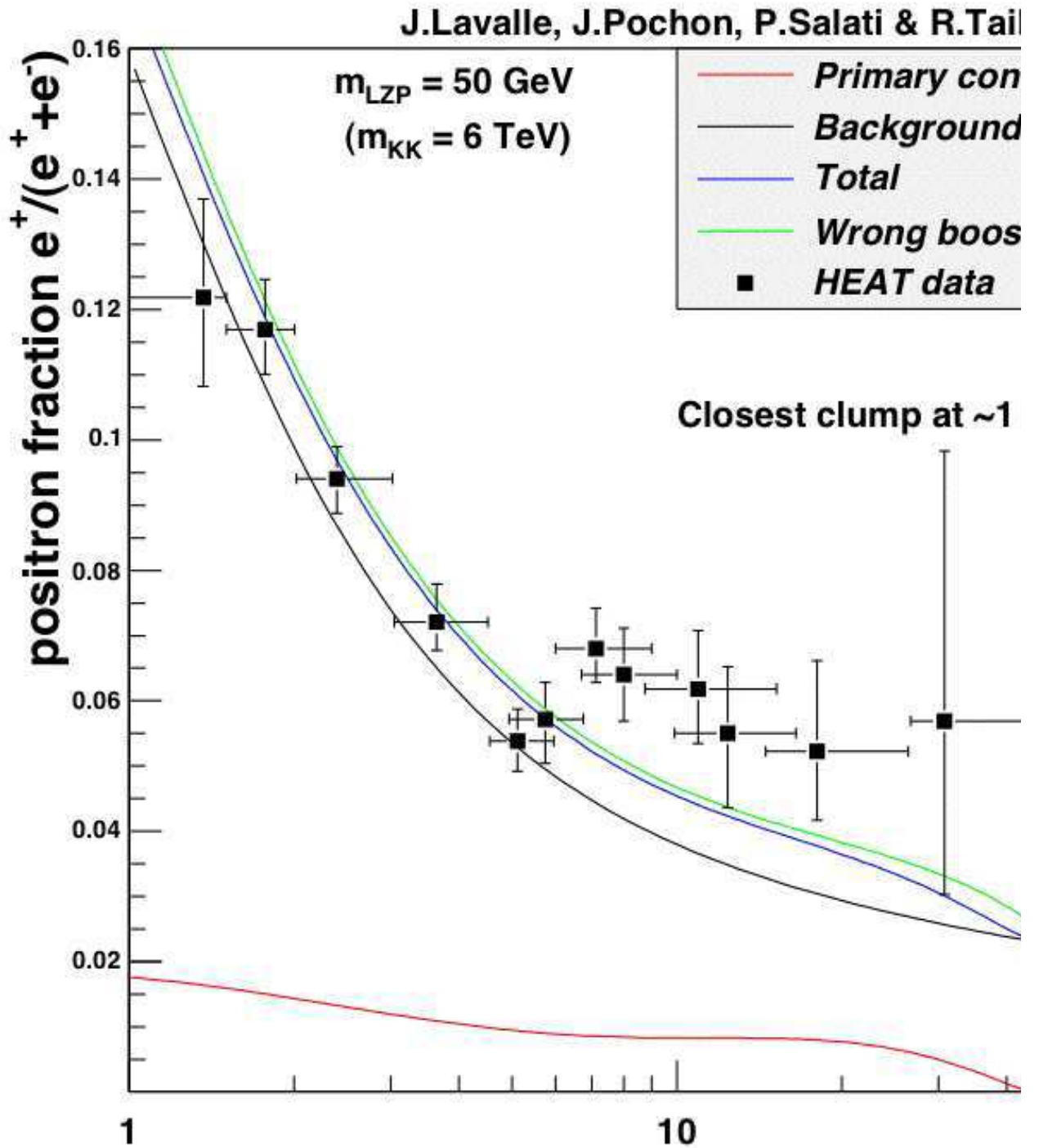


FIG. 10.7 – Fraction de positron attendue dans le repère des particules Z_3 -chargées les plus légères (LZP), surimposé sur les données de l'expérience HEAT [16].

Troisième partie

Dualité

Après une partie phénoménologique, nous reprenons ici, des considérations plus formelles sur les représentations de l'algèbre de supersymétrie. Ainsi, nous allons présenter dans un premier temps, d'autres représentations de l'algèbre. Puis dans un second temps, nous présenterons une notion de dualité bien particulière sans supersymétrie. Ensuite nous examinerons l'extension de cette notion de dualité au super-espace. Finalement, après avoir constaté les liens par dualité entre différentes représentations du multiplet $(0,1/2)$, nous allons nous intéresser aux couplages possibles de ces différents superchamps.

Chapitre 11

Multiplets de supersymétrie $N = 1$

Nous avons déjà mentionné dans l'introduction (1.4), le fait que l'on peut répéter l'analyse de Wigner du groupe de Poincaré, pour le groupe de super-Poincaré afin de classer les différentes représentations irréductibles de l'algèbre de supersymétrie $N = 1$, à quatre dimensions. Il faut cependant faire attention. Cette analyse se fait en termes d'états physiques sur un espace de Hilbert, alors qu'en théorie des champs, on travaille avec des champs locaux sur un espace vectoriel. De plus, nous avons remarqué la nécessité d'avoir des champs auxiliaires dans un multiplet de supersymétrie, afin que l'algèbre puisse se fermer hors couche de masse. C'est pourquoi, il sera possible d'avoir différentes représentations en termes de champs locaux, pour une même description en termes d'états physiques, la différence résidant dans la forme et le nombre des champs auxiliaires. Nous allons présenter dans un premier temps différents multiplets de supersymétrie $N = 1$ à quatre dimensions ; avant de nous attacher à leurs représentations en termes de superchamps contraints.

Sommaire

11.1 Représentations unitaires et champs locaux	97
11.2 Multiplet chirale (rappel)	99
11.3 Multiplet linéaire	100
11.4 Multiplet de 3-forme	101
11.5 Multiplet de 3-forme et représentation produit	102
11.6 Multiplet X	103

11.1 Représentations unitaires, description en termes de champs locaux

Les multiplets de supersymétrie $N = 1$ sont toujours de la forme $(s, s+1/2)$, où s est le spin le plus bas, des états contenus dans le supermultiplet. Voici une liste non exhaustive de quelques supermultiplets de supersymétrie $N = 1$ à quatre dimensions :

Multiplet $(0, 1/2)$ en terme d'états physiques, ces multiplets contiennent deux degrés de liberté bosoniques et deux degrés de liberté fermionique :

- Le multiplet chirale [97]

$$\Phi \sim (A, \chi_\alpha | F) \text{ avec } \begin{cases} A & : \text{ champ scalaire complexe,} \\ \chi_\alpha & : \text{ spineur de Weyl,} \\ F & : \text{ champ scalaire complexe auxiliaire,} \end{cases}$$

Ce supermultiplet a déjà été amplement discuté dans la première partie.

- Le multiplet linéaire [42, 86]

$$L \sim \left(L, \frac{\Lambda_\alpha}{\bar{\Lambda}^{\dot{\alpha}}} , b_{mn} \right) \text{ avec } \begin{cases} L & : \text{ champ scalaire réel,} \\ \Lambda_\alpha, \bar{\Lambda}^{\dot{\alpha}} & : \text{ spineur de Majorana,} \\ b_{mn} & : \text{ tenseur antisymétrique.} \end{cases}$$

Il est important de noter, que ce multiplet ne contient pas de champ auxiliaire à proprement parler.

- Le multiplet de 3-forme [51]

$$Y \sim \left(Y, \frac{\psi_\alpha}{\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}} , C_{lmn} | H \right) \text{ avec } \begin{cases} Y & : \text{ champ scalaire complexe,} \\ \psi_\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} & : \text{ spineur de Majorana,} \\ C_{lmn} & : \text{ tenseur antisymétrique,} \\ H & : \text{ scalaire réel.} \end{cases}$$

- Le multiplet X

$$X \sim \left(X, \frac{\eta_\alpha}{\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}} | \frac{\varphi_\alpha}{\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}}} , E, c, V_m, \frac{\Omega_\alpha}{\bar{\Omega}^{\dot{\alpha}}} \right) \text{ avec } \begin{cases} X & : \text{ champ scalaire complexe,} \\ \eta_\alpha, \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} & : \text{ spineur de Majorana,} \\ \varphi_\alpha, \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} & : \text{ spineur de Majorana,} \\ E & : \text{ champ scalaire complexe,} \\ c & : \text{ constante,} \\ V_m & : \text{ vecteur complexe,} \\ \Omega_\alpha, \bar{\Omega}^{\dot{\alpha}} & : \text{ spineur de Majorana.} \end{cases}$$

Le trait caractéristique de ce superchamp, est la présence d'une constante comme composante.

Multiplet (1/2,1) un seul multiplet de ce type est connu : le multiplet de jauge déjà rencontré dans la première partie. Il contient deux degrés de liberté bosoniques, mais cette fois sous la forme d'un champ de jauge sans masse et deux degrés de liberté fermioniques représentés par un spineur de Majorana.

- Le multiplet vectoriel de masse nulle

$$V \sim \left(a_m, \frac{\lambda_\alpha}{\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}} | D \right) \text{ avec } \begin{cases} a_m & : \text{ champ de jauge,} \\ \lambda_\alpha, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} & : \text{ spineur de Majorana,} \\ D & : \text{ champ scalaire réel.} \end{cases}$$

Multiplet (1,3/2) ce multiplet aussi contient deux degrés de liberté fermioniques et bosoniques, véhiculés par un champ de jauge et un champ de Rarita-Schwinger [17, 40, 45, 77].

- Le multiplet (1,3/2)

$$\left(B_m, \frac{\Gamma_{m\alpha}}{\bar{\Gamma}_m^{\dot{\alpha}}} | \frac{\rho_\alpha}{\bar{\rho}^{\dot{\alpha}}} , P, J, Y_m, T_{mn}, \frac{\Sigma_\alpha}{\bar{\Sigma}^{\dot{\alpha}}} \right) \text{ où } \begin{cases} B_m & : \text{ champ de jauge,} \\ \Gamma_{m\alpha}, \bar{\Gamma}_m^{\dot{\alpha}} & : \text{ Champ de Rarita – Schwinger,} \\ \rho_\alpha, \bar{\rho}^{\dot{\alpha}} & : \text{ spineur de Majorana,} \\ P & : \text{ champ scalaire réel,} \\ J & : \text{ champ scalaire complexe,} \\ Y_m & : \text{ vecteur complexe,} \\ T_{mn} & : \text{ tenseur antisymétrique,} \\ \Sigma_\alpha, \bar{\Sigma}^{\dot{\alpha}} & : \text{ spineur de Majorana.} \end{cases}$$

Le multiplet présenté ici, correspond au multiplet de de Wit-van Holten [17]. Il est

relié au multiplet de Ogievetsky-Sokatchev [53, 70] par une relation de dualité similaire à celle entre multiplet chiral et linéaire que nous allons présenter ultérieurement. Une présentation de ce mécanisme sur le super-espace peut être trouvée dans [52–54].

Multiplet (3/2,2) même si cette thèse est basée sur la supersymétrie rigide, on ne peut cependant pas oublier de présenter le multiplet de supergravité apparaissant dans le modèle mSugra :

- Le multiplet minimal [39, 88]

$$\left(e_m^a, \begin{array}{c} \psi_{m\alpha} \\ \bar{\psi}_m^{\dot{\alpha}} \end{array} \mid b_a, M \right) \text{ avec } \left\{ \begin{array}{ll} e_m^a & : \text{ graviton,} \\ \psi_{m\alpha}, \bar{\psi}_m^{\dot{\alpha}} & : \text{ gravitino,} \\ b_a & : \text{ vecteur réel,} \\ M & : \text{ scalaire complexe.} \end{array} \right.$$

Cette liste de multiplets est non exhaustive. Désormais, il est intéressant de noter que pour les représentations (0,1/2) et (1,3/2), des relations de dualité existent entre les différents multiplets. Ainsi, pour la représentation (0,1/2), sur laquelle on va se concentrer à partir de maintenant, il existe une relation duale entre le multiplet chiral et le multiplet linéaire. De même, il existe une dualité entre le multiplet de 3-forme et le multiplet X . Dans la suite de ce chapitre, nous allons présenter plus en détails, la description en termes de superchamps sur le super-espace, des multiplets (0,1/2), sachant que les distinctions entre les différentes représentations résident dans un jeu de contraintes appropriées.

11.2 Multiplet chiral (rappel)

Les contraintes pour ce type de superchamp, comme on l’a déjà noté (section 2.2) sont :

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}}\Phi = 0, \quad D_{\alpha}\bar{\Phi} = 0.$$

Ces contraintes admettent une solution en terme d’un prépotentiel V , qui est lui-même, un superchamp complexe non contraint ou prépotentiel :

$$\Phi = \bar{D}^2 V, \tag{11.1}$$

$$\bar{\Phi} = D^2 \bar{V}. \tag{11.2}$$

Les composantes d’un tel superchamp sont :

$$\Phi| = A, \quad D_{\alpha}\Phi| = \sqrt{2}\chi_{\alpha}, \quad D^2\Phi| = -4F, \tag{11.3}$$

$$\bar{\Phi}| = \bar{A}, \quad \bar{D}^{\dot{\alpha}}\bar{\Phi}| = \sqrt{2}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}, \quad \bar{D}^2\bar{\Phi}| = -4\bar{F}, \tag{11.4}$$

alors que les transformations de supersymétrie sont données par :

$$\delta_{\xi}\Phi = \xi^A D_A \Phi,$$

Cette dernière relation s’écrit en composantes :

$$\delta_{\xi}A = \sqrt{2}\xi\chi, \quad \delta_{\xi}\chi_{\alpha} = \sqrt{2}(\xi_{\alpha}F + i\sqrt{2}(\sigma^m\bar{\xi})_{\alpha}\partial_m A), \quad \delta_{\xi}F = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi.$$

Le lagrangien cinétique, quant à lui, est donné par la formule suivante :

$$16 \times \mathcal{L}_{\Phi\bar{\Phi}} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}D^2\bar{D}^{\dot{\alpha}}(\Phi\bar{\Phi}), \tag{11.5}$$

ce qui, après projection sur l'espace à quatre dimensions, détermine le lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}_{\Phi\bar{\Phi}} = -\partial_m A \partial^m \bar{A} - \frac{i}{2} (\bar{\chi} \sigma \partial_m \chi + \chi \sigma \partial_m \bar{\chi}) + F \bar{F}. \quad (11.6)$$

11.3 Multiplet linéaire

Le multiplet linéaire [42, 86] est un superchamp réel soumis aux contraintes

$$D^2 L = 0, \quad \bar{D}^2 L = 0, \quad (11.7)$$

dont la solution en termes de prépotentiels non contraints s'écrit :

$$L = \bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} + D^{\alpha} \bar{D}^2 \Psi_{\alpha},$$

avec Ψ_{α} et $\bar{\Psi}_{\dot{\alpha}}$ des superchamps chiraux non contraints. Ces prépotentiels spinoriels, sont soumis à l'invariance :

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha} &\rightarrow \Psi_{\alpha} + \chi_{\alpha}, \\ \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} &\rightarrow \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} + \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}, \end{aligned}$$

où le superchamp χ_{α} est soumis à la contrainte :

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} + D^{\alpha} \bar{D}^2 \chi_{\alpha} = 0.$$

Les composantes du superchamp linéaire sont données par les opérations de projection suivantes :

$$L| = L, \quad D_{\alpha} L| = \Lambda_{\alpha}, \quad \bar{D}^{\dot{\alpha}} L| = \bar{\Lambda}^{\dot{\alpha}}, \quad [D_{\alpha}, \bar{D}_{\dot{\alpha}}] L| = -\frac{1}{3} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^k \varepsilon_{klmn} h^{lmn},$$

où L est un champ scalaire réel ; Λ_{α} , $\bar{\Lambda}^{\dot{\alpha}}$ des spineurs de Weyl qui composent un spineur de Majorana et h_{lmn} le tenseur de champ de la 2-forme¹ :

$$h_{lmn} = \partial_l b_{mn} + \partial_m b_{nl} + \partial_n b_{lm}.$$

Les transformations de supersymétrie, elles, sont données par :

$$\begin{aligned} \delta L &= \xi \Lambda + \bar{\xi} \bar{\Lambda}, & \delta b_{nm} &= \xi \sigma_{nm} \Lambda + \bar{\xi} \bar{\sigma}_{nm} \bar{\Lambda}, \\ \delta \Lambda_{\alpha} &= (\bar{\sigma}^m \bar{\xi})_{\alpha} (i \partial_m L - \frac{1}{6} \varepsilon^{mnop} H_{nop}), & \delta \bar{\Lambda}_{\dot{\alpha}} &= (\xi \sigma^m)_{\dot{\alpha}} (-i \partial_m L - \frac{1}{6} \varepsilon^{mnop} H_{nop}). \end{aligned}$$

Le champ linéaire L étant réel, son lagrangien cinétique va s'écrire, sur le super-espace :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{32} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) L^2. \quad (11.8)$$

Une fois l'intégration sur les variables de Grassmann réalisée, on obtient le lagrangien en composantes suivant :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} * h^m * h_m - \frac{1}{2} \partial^m L \partial_m L - \frac{i}{2} (\Lambda \sigma \partial \bar{\Lambda} + \bar{\Lambda} \bar{\sigma} \Lambda).$$

Il est important de remarquer que dans ce multiplet, seul deux degrés de liberté bosoniques sous la forme d'un champ scalaire réel et d'un champ de jauge de type 2-forme, ainsi qu'un champ fermionique de Majorana, vont se propager. Ainsi, cette représentation est classifiée comme étant de type $(0, 1/2)$; à savoir le même type de représentation en terme d'états physiques qu'une représentation chirale.

¹En fait, la supersymétrisation de la 2-forme b_{mn} , est elle-même une 2-forme, mais sur le super-espace : B_{MN} . L'étude des identité de Bianchi [80] sur son champ de force : $H = dB$, nous montre qu'il est totalement déterminé par la donnée du superchamp linéaire présenté précédemment, à la manière dont apparaît le superchamp spinoriel W_{α} à partir de l'étude de l'identité de Bianchi sur le tenseur de champ de superQED : $dF = 0$.

11.4 Multiplet de 3-forme

Le superchamp de 3-forme [5, 51] est un superchamp chirale :

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}}Y = 0, \quad D_{\alpha}\bar{Y} = 0, \quad (11.9)$$

ayant la contrainte supplémentaire :

$$D^2Y - \bar{D}^2\bar{Y} = \frac{8i}{3}\varepsilon^{klmn}\Sigma_{klmn}, \quad (11.10)$$

où Σ_{klmn} est le champ de force d'une 3-forme C_{lmn} :

$$\Sigma_{klmn} = \partial_k C_{lmn} - \partial_l C_{mnk} + \partial_m C_{nkl} - \partial_n C_{klm}. \quad (11.11)$$

Le superchamp de 3-forme étant contraint, il admet une solution en terme de prépotentiel non contraint Ω :

$$Y = \bar{D}^2\Omega, \quad \bar{Y} = D^2\Omega, \quad (11.12)$$

avec, contrairement au superchamp chirale, un prépotentiel Ω réel.

Les contraintes (11.9) et (11.10), nous donnent le développement en composantes suivant :

$$Y| = Y, \quad D_{\alpha}Y| = \sqrt{2}\psi_{\alpha}, \quad (11.13)$$

$$\bar{Y}| = \bar{Y}, \quad \bar{D}^{\dot{\alpha}}\bar{Y}| = \sqrt{2}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, \quad (11.14)$$

et :

$$D^2Y| + \bar{D}^2\bar{Y}| = -8H, \quad (11.15)$$

$$D^2Y| - \bar{D}^2\bar{Y}| = \frac{8i}{3}\varepsilon^{klmn}\Sigma_{klmn}. \quad (11.16)$$

Si on pose :

$$\Lambda = \frac{1}{3}\varepsilon^{klmn}\Sigma_{klmn}, \quad (11.17)$$

afin de simplifier l'écriture, on a :

$$\begin{aligned} D^2Y| &= -4H + 4i\Lambda, \\ \bar{D}^2\bar{Y}| &= -4H - 4i\Lambda. \end{aligned}$$

Il est avantageux de comprendre la provenance de ce superchamp de manière géométrique pour la suite. En effet, lorsqu'on procède à l'analyse des identités de Bianchi sur Σ_{ABCD} , le tenseur de champ de la 3-forme sur le super-espace, on met en évidence que ce tenseur est entièrement déterminé par le superchamp Y respectant les contraintes sus-mentionnées (11.9-11.10). Effectivement, on obtient l'égalité suivante :

$$\Sigma_{\delta\gamma ba} = (\sigma_{ba})_{\delta\gamma} Y.$$

Or la contraction de cette forme, avec les éléments différentiels covariants (3.3), doit être neutre sous R-symétrie ; alors que les éléments différentiels spinoriels sont eux-même

chargés sous ce type de symétrie. L'élément $\Sigma_{\delta\gamma ba}$, et donc le superchamp Y , seront chargés sous R-symétrie, ce qui va s'avérer une caractéristique importante pour réaliser des couplages.

De nouveau, pour avoir les transformations de supersymétrie de ce superchamp, nous allons appliquer la dérivée de Lie par rapport au champ ξ_m défini par l'équation (3.37) :

$$\begin{aligned}\delta_\xi Y &= \sqrt{2}\xi\psi, & \delta_\xi\psi_\alpha &= \sqrt{2}\xi_\alpha\tilde{F} + i\sqrt{2}(\sigma^m\bar{\xi})_\alpha\partial_m Y, & \delta_\xi\tilde{F} &= i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}\partial\psi, \\ \delta_\xi\bar{Y} &= \sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\psi}, & \delta_\xi\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} &= \sqrt{2}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\tilde{\bar{F}} + i\sqrt{2}(\bar{\sigma}^m\xi)^{\dot{\alpha}}\partial_m\bar{Y}, & \delta_\xi\tilde{\bar{F}} &= i\sqrt{2}\xi\sigma\partial\bar{\psi},\end{aligned}$$

où on a posé pour simplifier :

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= H - i\Lambda, \\ \tilde{\bar{F}} &= H + i\Lambda,\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\delta_\xi H = \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\xi}\bar{\sigma}\partial\psi + \xi\sigma\partial\bar{\psi}).$$

En prenant en compte les définitions (11.11) et (11.17), on obtient :

$$\delta_\xi C_{klm} = -\frac{\sqrt{2}}{16}\varepsilon_{klmn}(\bar{\xi}\bar{\sigma}^n\psi - \xi\sigma^n\bar{\psi}).$$

Le lagrangien cinétique, quant à lui, va être identique à celui pour un superchamp chiral (11.5) :

$$16 \times \mathcal{L} = \bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} (Y\bar{Y}), \quad (11.18)$$

ce qui après calcul nous donne :

$$\mathcal{L} = -\partial_m Y \partial^m \bar{Y} - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\bar{\sigma}\partial_m\psi + \psi\sigma\partial\bar{\psi}) + H^2 + \Lambda^2. \quad (11.19)$$

11.5 Multiplet de 3-forme et représentation produit

Le multiplet de 3-forme possède une application en tant que description effective d'un condensat de jauginos [4, 8]. Pour être plus précis, on sait que le champ de force d'une théorie de jauge supersymétrique est contenu dans les superchamps spinoriels W^α et $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$, soumis aux contraintes suivantes :

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} W_\alpha = 0, \quad D^\alpha \bar{W}^{\dot{\alpha}} = 0, \quad (11.20)$$

$$D^\alpha W_\alpha = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}. \quad (11.21)$$

Est-il possible de construire une représentation produit du type $W^\alpha W_\alpha$? Pour répondre à cette question, il faut rechercher les conséquences des contraintes (11.20) et (11.21) sur la représentation produit. La contrainte de chiralité (11.20) implique que la représentation produit est elle-même chirale. On peut cependant se demander quelle va être la contrainte supplémentaire associée à la relation subsidiaire (11.21). Pour cela, il faut considérer les composantes du superchamp spinoriel :

$$\begin{aligned}W_\alpha| &= -i\lambda_\alpha, & D^\alpha W_\alpha| &= -2D, & D^2 W_\alpha| &= 4(\sigma\partial\bar{\lambda})_\alpha, \\ \bar{W}^{\dot{\alpha}}| &= i\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}, & \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}| &= -2D, & \bar{D}^2 \bar{W}^{\dot{\alpha}}| &= -4(\bar{\sigma}\partial\lambda)^{\dot{\alpha}}.\end{aligned}$$

Mais, il est aussi très utile de connaître les relations suivantes :

$$\begin{aligned} D_\beta W_\alpha &= -i(\sigma_{ba}\epsilon)_{\beta\alpha} f^{ba} - \epsilon_{\beta\alpha} D, \\ \overline{D}_{\dot{\beta}} \overline{W}_{\dot{\alpha}} &= -i(\epsilon \overline{\sigma}_{ba})_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} f^{ba} - \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} D, \end{aligned}$$

où λ est le jaugino, f_{ab} le champ de force du champ de jauge a_m et D le scalaire réel auxiliaire. Ainsi, on peut calculer :

$$D^2 W^2 = 8i\lambda\sigma\partial\overline{\lambda} - 4D^2 + 2f^{ba}f_{ba} - i\varepsilon^{abcd}f_{ab}f_{cd}, \quad (11.22)$$

$$\overline{D}^2 \overline{W}^2 = 8i\overline{\lambda}\overline{\sigma}\partial\lambda - 4D^2 + 2f^{ba}f_{ba} + i\varepsilon^{abcd}f_{ab}f_{cd}, \quad (11.23)$$

alors, on a la contrainte supplémentaire sur la représentation produit :

$$D^2 W^2 - \overline{D}^2 \overline{W}^2 = -2i\varepsilon^{abcd}f_{ab}f_{cd},$$

alors que la combinaison orthogonale, nous donne le lagrangien de super-Yang-Mills.

Donc, il est évident que la représentation produit possède les caractéristiques d'une 3-forme ; ainsi, on va définir Y comme un superchamp composite :

$$Y = W^2 \quad \text{et} \quad \overline{Y} = \overline{W}^2. \quad (11.24)$$

D'une part, il faut noter qu'ici, la 3-forme n'est pas quelconque, mais une forme de Chern :

$$D^2 Y - \overline{D}^2 \overline{Y} = 2i\partial_a * Q^a,$$

avec : $*Q^a = -\varepsilon^{abcd}(a_b\partial_c a_d - \frac{2i}{3}a_b a_c a_d)$. D'autre part, on sait que :

$$\varepsilon^{abcd}\partial_a Q_{bcd} = -\frac{2}{3}\varepsilon^{abcd}f_{ab}f_{cd}.$$

Par conséquent, en composantes, on a pour le champ composite :

$$Y| = -\lambda^2, \quad D^\alpha Y| = -2(\epsilon\sigma_{ba}\lambda)^\alpha f^{ba} + 2i\lambda^\alpha D, \quad (11.25)$$

$$\overline{Y}| = -\overline{\lambda}^2, \quad \overline{D}_{\dot{\alpha}} \overline{Y}| = -2(\epsilon\overline{\sigma}_{ba}\overline{\lambda})_{\dot{\alpha}} f^{ba} - 2i\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}} D, \quad (11.26)$$

alors que grâce aux relations (11.22) et (11.23) déjà calculées, on a :

$$D^2 Y| = 8i\lambda\sigma\partial\overline{\lambda} - 4D^2 + 2f^{ba}f_{ba} - i\varepsilon^{abcd}f_{ab}f_{cd}, \quad (11.27)$$

$$\overline{D}^2 \overline{Y}| = 8i\overline{\lambda}\overline{\sigma}\partial\lambda - 4D^2 + 2f^{ba}f_{ba} + i\varepsilon^{abcd}f_{ab}f_{cd}. \quad (11.28)$$

Si on veut calculer le lagrangien donnant la dynamique du condensat de jaugino, il suffit de remplacer les composantes du superchamp de 3-forme Y dans le lagrangien (11.19) par les composantes de ce superchamp en fonction de W (11.25-11.28).

11.6 Multiplet X

Dans ce qui suit, nous allons investiguer un nouveau jeu de contraintes pour un superchamp complexe général :

$$D^2 \overline{X} = 4\overline{c}, \quad \overline{D}^2 X = 4c, \quad (11.29)$$

où c est un nombre complexe quelconque. En particulier nous allons examiner quelles sont les composantes de ce nouveau multiplet, les propriétés spécifiques de celles-ci sous transformations de supersymétrie, avant de montrer que ce multiplet n'est en fait qu'une autre représentation en terme de champs locaux du supermultiplet $(0, 1/2)$.

À partir des contraintes (11.29), on peut définir les composantes du superchamp X par applications successives des dérivées covariantes de supersymétrie :

$$\begin{aligned} X| &= X, & D_\alpha X| &= \sqrt{2}\varphi_\alpha, & \bar{D}^{\dot{\alpha}} X| &= \sqrt{2}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}, & \bar{D}^2 X| &= 4c, \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha X| &= \sqrt{2}V_{\alpha\dot{\alpha}}, & D^2 X| &= 4E, & D^\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}} D_\alpha X| &= 4\sqrt{2}\bar{\Omega}^{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Cet ensemble contient toutes les composantes indépendantes du superchamp X . L'application d'autres dérivées covariantes, ferait apparaître des dérivées de ces champs. Comme exercice, on peut calculer les deux éléments restants, et on trouve :

$$\begin{aligned} \bar{D}^2 D_\alpha X| &= 4i\sqrt{2}\sigma\partial\bar{\eta}, \\ \bar{D}^2 D^2 X| &= -16\Box X + 16i\sqrt{2}\partial_m V^m, \end{aligned}$$

qui ne sont autres que les dérivées de termes déjà présents. Les composantes pour le superchamp complexe conjugué sont, quant à elles, données par :

$$\begin{aligned} \bar{X}| &= \bar{X}, & D_\alpha \bar{X}| &= \sqrt{2}\eta_\alpha, & \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{X}| &= \sqrt{2}\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}}, & D^2 \bar{X}| &= 4\bar{c}, \\ D_\alpha \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{X}| &= \sqrt{2}\bar{V}_{\alpha\dot{\alpha}}, & \bar{D}^2 \bar{X}| &= 4\bar{E}, & \bar{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{X}| &= 4\sqrt{2}\Omega_\alpha. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Désormais, il faut rechercher les transformations de supersymétrie pour les composantes de ce superchamp :

$$\begin{aligned} \delta_\xi X &= \sqrt{2}(\xi\varphi + \bar{\xi}\bar{\eta}), \\ \delta_\xi \varphi_\alpha &= -\sqrt{2}\xi_\alpha E - (\sigma^m \bar{\xi})_\alpha V_m, \\ \delta_\xi \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} &= -\sqrt{2}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} c - (\bar{\sigma}^m \xi)^{\dot{\alpha}} (V_m + i\sqrt{2}\partial_m X), \\ \delta_\xi E &= -\sqrt{2}\bar{\xi} \left(\bar{\Omega} + \frac{i}{2}\bar{\sigma} \partial \varphi \right), \\ \delta_\xi V_m &= \xi \left(\sigma_m \bar{\Omega} + \frac{i}{2}\sigma^m \bar{\sigma}_n \partial_n \varphi \right) + i\bar{\xi} \bar{\sigma}_m \sigma^n \partial_n \bar{\eta} - i\partial_m (\xi\varphi), \\ \delta_\xi \bar{\Omega}^{\dot{\alpha}} &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (\bar{\sigma}^m \xi)^{\dot{\alpha}} \partial_m E - \sqrt{2}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \Box X + i\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \partial_m V^m - \frac{i}{2} (\bar{\sigma}^n \sigma^m \bar{\xi})^{\dot{\alpha}} \partial_m V_n. \end{aligned}$$

La présence de la constante génère une transformation de supersymétrie inhomogène pour le champ fermionique η ; ce qui constitue une signature de la brisure spontanée de supersymétrie.

Il est intéressant de noter qu'il est possible de redéfinir Ω comme :

$$\bar{\omega}^{\dot{\alpha}} = - \left(\bar{\Omega} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m \partial_m \varphi \right)^{\dot{\alpha}},$$

ce qui revient à prendre une autre définition de la composante $\theta^\alpha \bar{\theta}^2$:

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} D^2 X| = 4\sqrt{2}\omega^{\dot{\alpha}}.$$

On obtient alors les transformations de supersymétrie suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta_\xi X &= \sqrt{2} (\xi\varphi + \bar{\xi}\bar{\eta}), \\
\delta_\xi \varphi_\alpha &= -\sqrt{2} \xi_\alpha E - (\sigma^m \bar{\xi})_\alpha V_m, \\
\delta_\xi \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} &= -\sqrt{2} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} c + (\bar{\sigma}^m \xi)^{\dot{\alpha}} (V_m + i\sqrt{2} \partial_m X), \\
\delta_\xi E &= \sqrt{2} \bar{\xi} \bar{\omega}, \\
\delta_\xi V_m &= \sqrt{2} \xi \sigma_m \bar{\omega} + i \bar{\xi} \bar{\sigma}_m \sigma^n \partial_n \bar{\eta} + i \xi \sigma_n \bar{\sigma}_m \partial^n \varphi, \\
\delta_\xi \bar{\omega}^{\dot{\alpha}} &= i\sqrt{2} (\bar{\sigma}^m \xi)^{\dot{\alpha}} \partial_m E - i \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \partial_m (V^m + i\sqrt{2} \partial^m X).
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient avec le superchamp complexe conjugué :

$$\begin{aligned}
\delta_\xi \bar{X} &= \sqrt{2} (\xi\eta + \bar{\xi}\bar{\varphi}), \\
\delta_\xi \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} &= -\sqrt{2} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{E} - (\bar{\sigma}^m \xi)^{\dot{\alpha}} \bar{V}_m, \\
\delta_\xi \eta_\alpha &= -\sqrt{2} \xi_\alpha \bar{c} + (\sigma^m \bar{\xi})_\alpha (\bar{V}_m + i\sqrt{2} \partial_m \bar{X}), \\
\delta_\xi \bar{E} &= \sqrt{2} \xi \omega, \\
\delta_\xi \bar{V}_m &= \sqrt{2} \bar{\xi} \bar{\sigma}_m \omega + i \xi \sigma_m \bar{\sigma}^n \partial_n \eta + i \bar{\xi} \bar{\sigma}_n \sigma_m \partial^n \varphi, \\
\delta_\xi \omega_\alpha &= i\sqrt{2} (\sigma^m \bar{\xi})_\alpha \partial_m \bar{E} - i \xi_\alpha \partial_m (\bar{V}^m + i\sqrt{2} \partial^m \bar{X}).
\end{aligned}$$

Il est important de noter que c'est le terme ω qui semble se transformer comme une dérivée totale.

Le superchamp X étant complexe, le lagrangien cinétique invariant va s'écrire :

$$16 \times \mathcal{L}_{X\bar{X}} = -\bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} (X\bar{X}). \quad (11.32)$$

Ainsi, le lagrangien en composantes va se calculer par application successives des dérivées covariantes de supersymétrie, en tenant compte des contraintes sur le superchamp X (11.29), ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
16 \times \mathcal{L}_{X\bar{X}} &= -\bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} X \bar{X} - X \bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{X} + 2\bar{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha X D^\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{X} + 2D^\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}} X \bar{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha \bar{X} \\
&+ 2\bar{D}_{\dot{\alpha}} D^\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}} X D_\alpha \bar{X} - \bar{D}_{\dot{\alpha}} X \{D^2, \bar{D}^{\dot{\alpha}}\} \bar{X} + 2D^\alpha X \bar{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{X} \\
&+ \{\bar{D}^{\dot{\alpha}}, D^2\} X \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{X} + \{\bar{D}^{\dot{\alpha}}, D^2\} X \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{X} - D^2 X \bar{D}^2 \bar{X} - 16c\bar{c}.
\end{aligned}$$

Pour continuer ce premier calcul, il est utile de connaître les relations suivantes :

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} X = -16\Box X - 4i\bar{\sigma}^m{}^{\dot{\alpha}\beta} \partial_m \bar{D}_{\dot{\alpha}} D_\beta X \quad (11.33)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{X} = -16\Box \bar{X} - 4i\bar{\sigma}^m{}^{\dot{\alpha}\beta} \partial_m D_\beta \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{X} \quad (11.34)$$

$$\{\bar{D}^{\dot{\alpha}}, D^2\} X = -2D^\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}} D_\alpha X \quad (11.35)$$

$$\{D^2, \bar{D}^{\dot{\alpha}}\} \bar{X} = -2D^\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}} D_\alpha \bar{X} \quad (11.36)$$

$$\begin{aligned}
D^\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}} X \bar{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha \bar{X} &= \bar{D}^{\dot{\alpha}} D^\alpha X D_\alpha \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{X} + 8\partial_m X \partial^m \bar{X} \\
&+ 2i \left(\bar{D}^{\dot{\alpha}} D^\alpha X \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{X} + D_\alpha \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{X} \bar{\sigma}_m^{\dot{\alpha}\alpha} \partial^m X \right)
\end{aligned} \quad (11.37)$$

ainsi, on trouve :

$$\mathcal{L}_{X\bar{X}} = -\partial_m X \partial^m \bar{X} - \frac{i}{2} (\eta \sigma \partial \bar{\eta} + \bar{\eta} \bar{\sigma} \partial \eta) - V_m \bar{V}^m - E \bar{E} - c \bar{c} + \varphi \Omega + \bar{\Omega} \bar{\varphi} \quad (11.38)$$

À partir du lagrangien, il est possible de constater que seuls deux champs vont se propager : X et η , les autres champs étant auxiliaires. De plus, comme on l'a constaté, la constante semble briser la supersymétrie, mais seulement au niveau du vide, c'est-à-dire que le vide est non supersymétrique car non nul. Toutefois, aucun mécanisme ne vient propager cette brisure aux degrés de liberté de la théorie. Ainsi le spectre reste dégénéré et donc supersymétrique².

²C'est en quelque sorte l'analogue du champ factice rencontré section 6.2.

Chapitre 12

Dualité sans supersymétrie

En physique, la notion de dualité est une notion au contour flou, dont le terme peut référer à des phénomènes très différents. On peut citer la dualité de Poincaré, celle de Hodge... Les exemples ne manquent pas. Cependant, nous allons nous consacrer à la présentation de ce que nous entendons par “dualité” dans ce chapitre.

Sommaire

12.1 Dualité pseudoscalaire/2-forme	107
12.2 Dualité champ de jauge/champ de jauge	109
12.3 Dualité constante/3-forme	110

12.1 Dualité pseudoscalaire/2-forme

Dans la partie précédente, nous avons mentionné la présence d’une 2-forme comme champ de jauge, présente dans le multiplet linéaire. De ce fait, il faut commencer par définir les propriétés d’un tel objet. Tout d’abord, il faut préciser que la seule forme pour un potentiel de jauge n’est pas un champ vectoriel (ou plutôt une 1-forme dans le langage géométrique, pour être précis) comme en QED. D’autres types de potentiels de jauge existent avec une autre phénoménologie. En particulier, il est possible de définir une 2-forme totalement anti-symétrique : b_{mn} , comme potentiel de jauge [76]. De la même manière que pour QED, on va être capable d’écrire un champ de force :

$$h_{lmn} = \partial_l b_{mn} + \partial_m b_{nl} + \partial_n b_{lm},$$

qui sera par définition, invariant sous la transformation de jauge suivante :

$$b_{mn} \rightarrow b_{mn} + \partial_m \beta_n - \partial_n \beta_m.$$

Le paramètre de jauge : β_m est alors, lui-même, une 1-forme. En outre, le champ de force satisfera l’identité de Bianchi suivante :

$$\varepsilon^{klmn} \partial_k h_{lmn} = 0. \quad (12.1)$$

Remarque Dans tout ce qui suit nous allons avoir besoin de définir la dualité de Hodge.

Soit P , une p -forme, dans un espace à $n \geq p$ dimensions, on définit le dual de Hodge comme :

$$*P^{a_1 \dots a_{n-p}} = \frac{1}{p!} \varepsilon^{a_1 \dots a_n} P_{a_{n-p+1} \dots a_n}. \quad (12.2)$$

Donc, le dual de notre champ de force sera :

$$*h^k = \frac{1}{3!} \varepsilon^{klmn} h_{lmn},$$

ce qui nous permet de réécrire l'identité de Bianchi (12.1) :

$$\partial_k *h^k = 0, \quad (12.3)$$

mais aussi, une action cinétique invariante de jauge :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} *h^m *h_m. \quad (12.4)$$

Nous avons tous les éléments pour définir ce que nous entendons par action duale¹.

Action de type I définissons une action au premier ordre contenant un pseudoscalaire a et un vecteur X_m , de la façon suivante :

$$\mathcal{L}_I = X^m \partial_m a + \frac{1}{2} X^m X_m. \quad (12.5)$$

- Variation de l'action par rapport au pseudoscalaire a :
on trouve : $\partial_m X^m = 0$, cette équation est similaire à l'identité de Bianchi pour le tenseur de champ de la 2-forme (12.3), ce qui nous permet d'énoncer l'égalité suivante :

$$X^k = \frac{1}{3!} \varepsilon^{klmn} \partial_l b_{mn}.$$

Alors, en définissant : $*h^m = X^m$, le lagrangien (12.5) se réécrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} *h^m *h_m,$$

que l'on reconnaît comme étant le lagrangien pour une 2-forme présenté précédemment (12.4).

- Variation de l'action par rapport au vecteur X^m :
ceci nous procure l'équation : $X^m = -\partial^m a$.
Ainsi, on trouve l'action cinétique pour un champ scalaire :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial^m a \partial_m a.$$

Finalement, le lagrangien au premier ordre (12.6), nous donne deux lagrangiens au second ordre, selon le champ qu'on varie dans l'action. C'est dans ce sens qu'on parle de dualité entre l'action cinétique pour la 2-forme et celle pour le pseudoscalaire.

Action de type II on peut aussi définir une action au premier ordre, de la manière suivante :

$$\mathcal{L}_{II} = X^m *h_m + \frac{1}{2} X^m X_m, \quad (12.6)$$

où X^m est toujours un champ vectoriel. Cependant, le champ connu cette fois-ci, est le tenseur de champ de la 2-forme.

¹dans tout ce chapitre, et le suivant, nous noterons en gras les champs (resp. superchamps) qui ne sont pas connus *ab initio*.

- Variation de l'action par rapport au vecteur \mathbf{X}^m :
on obtient alors : $\mathbf{X}^m = - * h^m$.
Ainsi, on retrouve l'action cinétique pour une 2-forme (12.4) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} * h^m * h_m.$$

- Variation de l'action par rapport à b_{mn} :
on utilise une intégration par parties, qui nous permet d'exprimer le lagrangien précédent (12.6) comme :

$$\mathcal{L}_{II} = -\varepsilon_{mnop} \partial^n \mathbf{X}^m b^{op} + \frac{1}{2} \mathbf{X}^m \mathbf{X}_m.$$

Ainsi, la variation par rapport à b_{mn} , nous donne l'équation : $\partial^n \mathbf{X}^m - \partial^m \mathbf{X}^n = 0$, dont la solution est naturellement : $\mathbf{X}^m = \partial^m a$, où a est un champ scalaire.

Ainsi, nous avons écrit un second type de lagrangien au premier ordre, avec toujours un vecteur comme multiplicateur de lagrange, et le tenseur de champ d'une 2-forme comme champ connu. Comme précédemment, selon le champ par lequel on fait varier le lagrangien, on obtient le lagrangien au second ordre pour un champ scalaire ou une 2-forme.

12.2 Dualité champ de jauge/champ de jauge

Il est possible d'écrire un lagrangien au premier ordre de type :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \mathbf{G}^{mn} \mathbf{G}_{mn} - \frac{1}{2} \mathbf{G}^{mn} F_{mn}, \quad (12.7)$$

où \mathbf{G}^{mn} est un tenseur quelconque et F_{mn} le champ de force du champ de jauge dont les propriétés sont connues.

- Variation par rapport à \mathbf{G}^{mn} :
on trouve immédiatement : $\mathbf{G}^{mn} = F^{mn}$, et le lagrangien (12.7) devient automatiquement le lagrangien de Yang-Mills habituel.
- Variation par rapport à A^m :
il est utile d'insérer la relation (A.10) dans le lagrangien afin de pouvoir l'écrire sous la forme :

$$\mathcal{L} = - \left(\frac{1}{4} * \mathbf{G}^{mn} * \mathbf{G}_{mn} + A_n \partial_m * \mathbf{G}^{mn} \right).$$

Ainsi la variation par le champ de jauge nous donne l'égalité suivante :

$$\partial_m * \mathbf{G}^{mn} = 0,$$

qui se résout grâce à l'égalité :

$$\mathbf{G}^{mn} = \partial^m B^n - \partial^n B^m.$$

Ceci nous montre que \mathbf{G}^{mn} est le tenseur de champ d'un potentiel de jauge. Par conséquent, nous avons montré qu'un champ de jauge est dual d'un champ de jauge, soit le champ de jauge est self-dual au sens de la dualité défini dans ce chapitre.

12.3 Dualité constante/3-forme

Dans un premier temps, on va s'intéresser aux propriétés de la 3-forme C_{lmn} , dont le champ de force :

$$\Sigma_{klmn} = \partial_k C_{lmn} - \partial_l C_{mnk} + \partial_m C_{nkl} - \partial_n C_{klm},$$

est invariant sous la transformation de jauge :

$$C_{lmn} \rightarrow C_{lmn} + \partial_l \Lambda_{mn} + \partial_m \Lambda_{nl} + \partial_n \Lambda_{lm},$$

où Λ_{mn} , le paramètre de jauge est une 2-forme. De part nature, l'identité de Bianchi : $d\Sigma = 0$ est satisfaite. Il est, dès lors, possible d'écrire le lagrangien cinétique invariant pour un tel objet :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(*\Sigma)^2.$$

La caractéristique de cette théorie, provient du fait que l'équation du mouvement pour la 3-forme :

$$\partial_k \Sigma^{klmn} = 0, \quad (12.8)$$

est exactement soluble avec le tenseur de champ défini par :

$$\Sigma^{klmn} = \varepsilon^{klmn} c,$$

où c est une constante.

Action de type I il est correct d'écrire un lagrangien au premier ordre de la forme [3] :

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{2} \mathbf{X}^2 + \mathbf{X} * \Sigma. \quad (12.9)$$

- Variation par rapport à C_{lmn} :
ce qui produit : $\varepsilon_{klmn} \partial^k \mathbf{X} = 0$, équation déjà connue (12.8), dont la solution est $X = k$, avec k constant.

- Variation par rapport à \mathbf{X} :

On a alors : $\mathbf{X} = - * \Sigma$.

Si on effectue le remplacement dans le lagrangien (12.9), après utilisation des équation du mouvement, on obtient de même un lagrangien constant.

Ainsi, pour le cas de la 3-forme aussi, on peut définir une relation de dualité. Cependant cette fois l'objet dual d'un champ est une constante.

Action de type II un autre lagrangien au "premier ordre" acceptable, est :

$$\mathcal{L}_{II} = \frac{1}{2} \mathbf{X}^2 + c \cdot \mathbf{X}, \quad (12.10)$$

où c est une constante.

- Variation par rapport à c :
il faut faire attention ici ; c est une constante et non un champ ; ce qui ne permet pas une variation du lagrangien. Il faut écrire l'action associée pour le second terme de l'équation (12.10) :

$$S_{II} = c \int d^4x \mathbf{X}. \quad (12.11)$$

On ne peut pas faire varier l'action par rapport à c non plus. Cependant, on sait que l'action (12.11) doit alors être nulle quel que soit c , ce qui implique :

$$\int d^4x \mathbf{X} = 0.$$

La solution la plus générale à ce problème de topologie est² :

$$\mathbf{X} = \varepsilon^{abcd} \partial_a C_{bcd},$$

soit \mathbf{X} le tenseur de champ d'une 3-forme. Ainsi le lagrangien (12.10) devient le lagrangien cinétique pour une 3-forme, dont les équations du mouvement définissent le tenseur de champ comme une constante.

- Variation par rapport à \mathbf{X} :

On alors : $\mathbf{X} = -c$. Ainsi le lagrangien (12.10) après remplacement de \mathbf{X} se transforme lui-même en une constante.

²pour un espace à quatre dimensions simplement connexe.

Chapitre 13

Version supersymétrique

Nous allons construire la version supersymétrique du mécanisme de dualité présenté dans le chapitre précédent. Au maximum, nous essaierons d'utiliser le formalisme des superchamps, afin de vérifier l'analogie de la méthode sur le super-espace avec ce que nous faisons précédemment sur l'espace à quatre dimensions. Cependant, cette démarche ne sera pas toujours possible, nous obligeant parfois à travailler avec des lagrangiens en composantes.

Sommaire

13.1 Dualité chirale/linéaire	113
13.2 Dualité multiplet de jauge / multiplet de jauge	115
13.3 Dualité multiplet de jauge / multiplet de jauge en composantes	117
13.4 Dualité multiplet X / multiplet de 3-forme	118
13.5 Dualité X/Y : formulation en composantes I	119
13.6 Dualité X/Y : Formulation en composantes II	122
13.7 Dualité de type I, avec Y comme représentation produit . . .	125

13.1 Dualité chirale/linéaire

Lagrangien de type I

Dans sa version supersymétrique [70, 80], le lagrangien (12.5) devient :

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{32} \left(D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2 \right) \left(\mathbf{V}^2 + \sqrt{2} \mathbf{V} (\Phi + \bar{\Phi}) \right), \quad (13.1)$$

où $\Phi, \bar{\Phi}$ sont des superchamps chiraux, alors que \mathbf{V} est un superchamp réel non contraint.

Variation par rapport à $\Phi, \bar{\Phi}$: en fait les superchamps chiraux étant contraints, on va utiliser leurs prépotentiels définis par :

$$\Phi = \bar{D}^2 \Sigma, \quad \bar{\Phi} = D^2 \bar{\Sigma},$$

où les prépotentiels $\Sigma, \bar{\Sigma}$ sont des superchamps complexes non contraints.

Après intégration par parties, le lagrangien (13.1) devient :

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{32} \left(D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2 \right) \left(\mathbf{V}^2 - \sqrt{2} \left(\Sigma \bar{D}^2 \mathbf{V} + \bar{\Sigma} D^2 \mathbf{V} \right) \right). \quad (13.2)$$

Il faut donc varier l'action par rapport aux superchamps non contraints $\Sigma, \bar{\Sigma}$, ce qui nous donne les contraintes sur \mathbf{V} :

$$\bar{D}^2 \mathbf{V} = 0, \quad D^2 \mathbf{V} = 0, \quad (13.3)$$

ce sont les contraintes pour un superchamp linéaire¹, que l'on a déjà présentées dans la section 11.3. Une fois les contraintes prises en compte, en renommant le superchamp \mathbf{V} en L , on obtient le lagrangien cinétique :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{32} \left(D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2 \right) L^2, \quad (13.4)$$

qui est bien le lagrangien cinétique pour une superchamp linéaire (11.8).

Variation par rapport à \mathbf{V} : ce superchamp n'étant, par définition, pas contraint, on peut directement varier le lagrangien (13.1) par rapport à celui-ci, et on trouve :

$$\mathbf{V} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi + \bar{\Phi}).$$

Cette contrainte, avec l'élément de volume choisi pour l'écriture du lagrangien, nous donne :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32} \left(D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2 \right) \Phi \bar{\Phi},$$

qui est l'action cinétique pour un champ chiral usuel (11.5).

Lagrangien de type II

Intéressons nous maintenant, à la dualité de type II (12.6), dont la version supersymétrique est donnée par le lagrangien :

$$\mathcal{L}_{II} = \frac{1}{32} \left(D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2 \right) (\mathbf{V}^2 + 2\mathbf{V}L), \quad (13.5)$$

avec cette fois, L le superchamp linéaire comme champ déterminé et toujours \mathbf{V} , le superchamp réel non contraint.

Variation par rapport à L : comme dans le cas chiral, le superchamp linéaire L , étant contraint, il s'exprime donc naturellement en fonction d'un prépotentiel. Ce prépotentiel a déjà été présenté en section 11.3, c'est le superchamp spinoriel Ψ_α non contraint, qui permet d'écrire L comme :

$$L = \bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} + D^\alpha \bar{D}^2 \Psi_\alpha,$$

ce qui nous permet de réaliser une intégration par partie du lagrangien (13.5) :

$$\mathcal{L}_{II} = \frac{1}{32} \left(D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2 \right) \left(\mathbf{V}^2 - 2 \left(\bar{\Psi}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V} + \Psi^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha \mathbf{V} \right) \right).$$

Il est maintenant aisé de faire une variation par rapport aux superchamps spinoriels non contraints : Ψ_α et $\bar{\Psi}^{\dot{\alpha}}$, ce qui impose les contraintes suivantes sur \mathbf{V} :

$$D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V} = 0, \quad \bar{D}^2 D_\alpha \mathbf{V} = 0.$$

¹Il est intéressant de noter, que l'on aurait pu travailler avec un superchamp \mathbf{V} complexe. On aurait alors trouvé le même type de contraintes. On aurait alors parlé de superchamp complexe linéaire [50], qui contient un nombre plus important de champs auxiliaires.

Si on se rappelle les relations permettant d'extraire la partie invariante de jauge d'un superchamp réel quelconque (??), on s'aperçoit rapidement que le superchamp \mathbf{V} , est constitué uniquement de la partie pure jauge, ce qui peut s'écrire : $\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi + \bar{\Phi})$. Ainsi, le lagrangien au premier ordre (13.5) devient :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) (\Phi \bar{\Phi}),$$

qui n'est autre que le lagrangien cinétique pour un superchamp chiral (11.5).

Variation par rapport à \mathbf{V} : on parvient alors à l'équation $\mathbf{V} = -L$, qui nous permet de réécrire le lagrangien (13.5) :

$$\mathcal{L}_{II} = -\frac{1}{32} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) L^2,$$

qui est bien le lagrangien cinétique pour un superchamp linéaire.

Donc, le mécanisme de dualité présenté dans le chapitre précédent, sans supersymétrie, admet une extension supersymétrique, du moins pour la dualité pseudo-scalaire/2-forme. Mais qu'en est-il pour les autres types de dualité ? C'est à cette question que nous allons répondre dans les sections suivantes.

13.2 Dualité multiplet de jauge / multiplet de jauge

On écrit l'action :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} \left(D^2 \left(\mathbf{G}^\alpha \left(\frac{1}{2} \mathbf{G}_\alpha - W_\alpha \right) \right) + \bar{D}^2 \left(\bar{\mathbf{G}}_{\dot{\alpha}} \left(\frac{1}{2} \bar{\mathbf{G}}^{\dot{\alpha}} - \bar{W}^{\dot{\alpha}} \right) \right) \right), \quad (13.6)$$

avec W^α le superchamp de jauge et \mathbf{G}^α un superchamp spinoriel chiral. La contrainte de chiralité pour le superchamp habituellement totalement non contraint, provient de l'élément de volume sur lequel on travaille, qui dans ce cas est chiral. Ainsi, pour que l'action soit supersymétrique, il est nécessaire qu'elle soit issue d'un produit (ou d'une contraction lorsqu'on travaille avec des superchamps spinoriels) de superchamps chiraux. Néanmoins, il ne sera pas nécessaire de considérer le superchamp \mathbf{G}^α comme contraint quand on variera l'action par ce superchamp².

Variation par rapport à $\mathbf{G}_\alpha, \bar{\mathbf{G}}^{\dot{\alpha}}$: on a immédiatement

$$\mathbf{G}^\alpha = W^\alpha, \quad \bar{\mathbf{G}}_{\dot{\alpha}} = \bar{W}_{\dot{\alpha}}.$$

Ainsi le lagrangien (13.6) s'écrit :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16} (D^2 W^2 + \bar{D}^2 \bar{W}^2),$$

qui n'est autre que le lagrangien cinétique pour le superchamp de jauge.

²Il est possible de mener l'analyse en considérant le superchamp \mathbf{G}^α contraint. Cependant, ceci nous ferait considérer une action définie avec les prépotentiels de \mathbf{G}^α et $\bar{\mathbf{G}}_{\dot{\alpha}}$ sur un super-espace vectoriel (où la densité s'écrit $\bar{D}^2 D^2 + h.c.$). Les propriétés des opérateurs de dérivation nous amèneront aux mêmes conclusions qu'en travaillant sur un élément de volume chiral en considérant les superchamps chiraux comme non contraints.

Variation par rapport à W_α , $\bar{W}^{\dot{\alpha}}$: il faut faire attention ici. L'expression des superchamps W^α et $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ à partir du champ de force (5.25) et (5.26), et la définition de celui-ci en fonction du potentiel de jauge (5.36), nous permet d'obtenir les relations suivantes :

$$W_\beta = -\frac{1}{4}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^a \left(\bar{D}^{\dot{\beta}} A_a - \partial_a A^{\dot{\beta}} \right), \quad (13.7)$$

$$\bar{W}^{\dot{\beta}} = -\frac{1}{4}\bar{\sigma}_a^{\dot{\beta}\beta} (D_\beta A^a - \partial^a A_\beta). \quad (13.8)$$

Cependant, contrairement au cas non supersymétrique, l'expression du champ de force en fonction du champ de jauge, ne va pas être une condition suffisante pour avoir les conditions adéquates sur \mathbf{G}_α . Par exemple si on utilise les relations (13.7) et (13.8) pour réaliser une intégration par parties du lagrangien (13.6), on parvient à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{16} \left(D^2 \mathbf{G}^2 + \bar{D}^2 \bar{\mathbf{G}}^2 \right) \\ & + \frac{1}{32} \left(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a D^2 \left(\bar{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{G}^\alpha A_a - \partial_a \mathbf{G}^\alpha A^{\dot{\alpha}} \right) + \bar{\sigma}_a^{\dot{\alpha}\alpha} \bar{D}^2 \left(D^\alpha \bar{\mathbf{G}}^{\dot{\alpha}} A_a - \partial^a \bar{\mathbf{G}}^{\dot{\alpha}} A_\alpha \right) \right), \end{aligned}$$

où la variation par rapport à A_a , nous donne la contrainte de chiralité alors que les variations par rapport à A_α et son complexe conjugué nous donnent les contraintes supplémentaires :

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot{\alpha}} D^\alpha \mathbf{G}_\alpha &= 0, \\ D^\alpha \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathbf{G}}^{\dot{\alpha}} &= 0, \end{aligned}$$

qui sont redondantes avec la notion de chiralité. De ce fait, la variation par rapport aux superchamps de jauge n'apporte aucune information supplémentaire. Ceci provient du fait que, contrairement au cas non supersymétrique, l'égalité : $F = dA$ sur le super-espace, ne détermine pas entièrement le champ de force. Comme on l'a montré dans le chapitre 5, il faut de plus imposer des contraintes sur le champ de force (5.11) et (5.13). Ce sont ces contraintes qui ne sont pas prises en compte par la donnée des relations (13.7) et (13.8). On a déjà noté que l'expression naturelle des champs W^α et $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ était :

$$W_\alpha = \bar{D}^2 D_\alpha V, \quad \bar{W}^{\dot{\alpha}} = D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} V.$$

Ainsi, après une première intégration par parties, prenant en compte la condition de chiralité sur \mathbf{G}_α , le lagrangien (13.6) devient :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16} \left(D^2 \mathbf{G}^2 + \bar{D}^2 \bar{\mathbf{G}}^2 \right) + \frac{1}{8} D^2 \bar{D}^2 \left(\mathbf{G}^\alpha D_\alpha V - \bar{\mathbf{G}}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} V \right).$$

On peut alors réaliser une seconde intégration par parties, afin d'obtenir :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16} \left(D^2 \mathbf{G}^2 + \bar{D}^2 \bar{\mathbf{G}}^2 \right) + \frac{1}{8} D^2 \bar{D}^2 \left(\left(D^\alpha \mathbf{G}_\alpha - \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathbf{G}}^{\dot{\alpha}} \right) V \right), \quad (13.9)$$

ce qui après variation par rapport à V , nous donne la relation supplémentaire sur \mathbf{G}^α :

$$D^\alpha \mathbf{G}_\alpha = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathbf{G}}^{\dot{\alpha}},$$

définissant \mathbf{G}_α comme un superchamp de jauge. Par conséquent le lagrangien (13.9), s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16} \left(D^2 \mathbf{G}^2 + \overline{D}^2 \overline{\mathbf{G}}^2 \right). \quad (13.10)$$

Il faut tout de même noter que ce lagrangien semble avoir un signe inadapté à la normalisation choisie.

Finalement, on a mis en évidence la dualité multiplet de jauge/multiplet de jauge dans le formalisme supersymétrique.

13.3 Dualité multiplet de jauge / multiplet de jauge en composantes

On a remarqué dans la partie précédente que la dualité avec des superchamps n'était pas si évidente à implémenter. De manière à vérifier la version supersymétrique de la dualité champ de jauge/champ de jauge, nous allons dans cette section, mener les calculs en composantes.

En premier lieu, nous devons définir les composantes du superchamp \mathbf{G}_α :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\alpha| &= -i\chi_\alpha, & D_\beta \mathbf{G}_\alpha| &= -i(\sigma_b \overline{\sigma}_a \epsilon)_{\beta\alpha} \mathbf{B}^{ba} - \epsilon_{\beta\alpha} H, & D^2 \mathbf{G}_\alpha| &= +4(\eta_\alpha + (\sigma \partial \overline{\chi})_\alpha), \\ \overline{\mathbf{G}}^{\dot{\alpha}}| &= +i\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}, & \overline{D}^{\dot{\beta}} \overline{\mathbf{G}}^{\dot{\alpha}}| &= -i(\overline{\sigma}^b \sigma^a \epsilon)^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \mathbf{B}_{ba} - \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \overline{H}, & \overline{D}^2 \overline{\mathbf{G}}^{\dot{\alpha}}| &= -4(\overline{\eta}^{\dot{\alpha}} + (\overline{\sigma} \partial \chi)^{\dot{\alpha}}), \end{aligned}$$

avec $H = (\mathbf{C} + \mathbf{E})$.

Par conséquent, le lagrangien (13.6) devient :

$$\begin{aligned} 4 \times \mathcal{L} &= 2i(\chi(\eta + \sigma \partial \overline{\chi}) + \overline{\chi}(\overline{\eta} + \overline{\sigma} \partial \chi)) - 2(\mathbf{C}^2 - \mathbf{E}^2) - 2\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_b^b + \mathbf{B}^{ab} \mathbf{B}_{ab} \\ &\quad - 2i(\lambda(\eta + 2\sigma \partial \overline{\chi}) + \overline{\lambda}(\overline{\eta} + 2\overline{\sigma} \partial \chi)) + 4D\mathbf{C} - 2\mathbf{B}^{ab} f_{ab}. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Variation par rapport à \mathbf{G}_α et $\overline{\mathbf{G}}^{\dot{\alpha}}$: si on réalise la variation en composantes, on trouve

$$\delta_\chi \mathcal{L} \Rightarrow \eta_\alpha = 2(\sigma \partial (\overline{\lambda} - \overline{\chi}))_\alpha, \quad \delta_{\overline{\chi}} \mathcal{L} \Rightarrow \overline{\eta}^{\dot{\alpha}} = 2(\overline{\sigma} \partial (\lambda - \chi))^{\dot{\alpha}}, \quad (13.12)$$

$$\delta_{\mathbf{C}} \mathcal{L} \Rightarrow D = \mathbf{C} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_a^a, \quad \delta_{\mathbf{E}} \mathcal{L} \Rightarrow \mathbf{E} = 0, \quad (13.13)$$

$$\delta_\eta \mathcal{L} \Rightarrow \chi_\alpha = \lambda_\alpha, \quad \delta_{\overline{\eta}} \mathcal{L} \Rightarrow \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\lambda}^{\dot{\alpha}} \quad (13.14)$$

$$\delta_{\mathbf{B}^{ba}} \mathcal{L} \Rightarrow \mathbf{B}_{ab} = f_{ab}. \quad (13.15)$$

En insérant l'équation (13.14) dans la relation (13.12), on obtient : $\eta_\alpha = \overline{\eta}^{\dot{\alpha}} = 0$. Dans ces conditions, le lagrangien (13.11) devient :

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2} (\lambda \sigma \partial \overline{\lambda} + \overline{\lambda} \overline{\sigma} \partial \lambda) + \frac{1}{2} D^2 - \frac{1}{4} f^{ba} f_{ba}, \quad (13.16)$$

qui n'est autre que le lagrangien de super-Yang-Mills (5.54).

Variation par rapport à W_α et $\overline{W}_{\dot{\alpha}}$: comme précédemment, on varie par rapport aux composantes du superchamp de jauge. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L} \Rightarrow \eta_\alpha &= -2(\sigma \partial \chi)_\alpha, & \delta_{\overline{\lambda}} \mathcal{L} \Rightarrow \overline{\eta}^{\dot{\alpha}} &= -2(\overline{\sigma} \partial \chi)^{\dot{\alpha}}, \\ \delta_D \mathcal{L} \Rightarrow \mathbf{C} &= 0, & \delta_{a^m} \mathcal{L} \Rightarrow \varepsilon_{mnop} \partial^n \mathbf{B}^{op} &= 0, \end{aligned}$$

où on a utilisé la dualité de Hodge (12.2) pour obtenir la variation par rapport au champ de jauge a^m . Il est alors possible de réécrire le lagrangien (13.11) comme :

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2}(\chi\sigma\partial\bar{\chi} + \bar{\chi}\sigma\partial\chi) + \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 - \frac{1}{4}*\mathbf{B}^{ba}*\mathbf{B}_{ba},$$

où \mathbf{B}^{ba} est le champ de force d'un champ de jauge et \mathbf{E} un scalaire réel. On retrouve alors un lagrangien de type super-Yang-Mills³.

Pour conclure, on a bien vérifié le mécanisme de dualité multiplet de jauge/multiplet de jauge en composantes. la conséquence de cet exercice est, comme dans le cas non supersymétrique, le fait que le multiplet de jauge est self-dual.

13.4 Dualité multiplet X / multiplet de 3-forme

Nous avons présenté dans la section 1.4, un multiplet contenant le tenseur de champ d'une 3-forme. Ainsi, on peut se demander si une version supersymétrique du mécanisme de dualité exposé dans le chapitre précédent (section 12.3) entre une 3-forme et une constante est réalisable, et surtout quelle forme va prendre la constante dans une théorie supersymétrique? Compte tenu du fait que le superchamp de 3-forme est chargé sous R-symétrie, le lagrangien au premier ordre s'écrira :

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{16}D\bar{D}^2D(\mathbf{V}\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}Y + \bar{\mathbf{V}}\bar{Y}), \quad (13.17)$$

avec \mathbf{V} un superchamp complexe quelconque de charge opposée au superchamp Y , qui est un superchamp de 3-forme.

Variation par rapport à \mathbf{V} : on obtient la relation suivante

$$\mathbf{V} = -\bar{Y} \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{16}D\bar{D}^2D(Y\bar{Y}).$$

Variation par rapport à Y : comme pour le superchamp chiral, il faut faire attention au fait que Y est un superchamp contraint qui s'écrit en fonction d'un prépotentiel :

$$Y = \bar{D}^2\Omega, \quad \bar{Y} = D^2\bar{\Omega},$$

où Ω est un superchamp réel. Ainsi, nous pouvons réaliser une intégration par parties du lagrangien (13.17), qui devient :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16}D\bar{D}^2D\left(\mathbf{V}\bar{\mathbf{V}} - \Omega\left(\bar{D}^2\mathbf{V} + D^2\bar{\mathbf{V}}\right)\right).$$

Si on effectue, présentement, la variation du lagrangien par rapport au superchamp non contraint Ω , on trouve la contrainte suivante :

$$\bar{D}^2\mathbf{V} + D^2\bar{\mathbf{V}} = 0. \quad (13.18)$$

D'après les propriétés des opérateurs D^α et $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$, il est évident que $\bar{D}^2\mathbf{V}$ et $D^2\bar{\mathbf{V}}$, définissent respectivement un superchamp chiral et son hermitique conjugué. De

³Il est important de remarquer que dans la version superchamp (13.10), le lagrangien semblait posséder le mauvais signe pour la normalisation. Ceci provient du fait que les définitions du tenseur de champ de jauge f_{ba} et de son dual au sens de Hodge sont interchangées dans ce nouveau superchamp.

plus, la contrainte (13.18) implique que ce champ chiral est imaginaire pur. Or la seule possibilité pour un tel champ d'être imaginaire pur, c'est que ce soit une constante, autrement dit :

$$\overline{D}^2 \mathbf{V} = ic, \quad D^2 \overline{\mathbf{V}} = -ic,$$

où c est une constante réelle. On retrouve ainsi les contraintes pour le superchamp X (11.29). Le lagrangien va donc pouvoir s'exprimer comme :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16} D \overline{D}^2 D (X \overline{X}),$$

après redéfinition : $X = \mathbf{V}$.

Il est impossible de rendre compte de la dualité de type II , *i.e.* avec X comme superchamp connu, puisque dans l'état actuel de nos connaissances sur ce multiplet, nous n'avons pas réussi à extraire une solution des contraintes en terme de superchamp non contraint. Ainsi, il va être intéressant de réaliser l'opération de dualité en composantes, afin de vérifier que la dualité est possible dans les deux sens. Cette vérification s'avère nécessaire pour tester la cohérence du mécanisme de dualité dans ce cas précis.

13.5 Dualité X/Y : formulation en composantes I

Dans cette partie, nous allons calculer le lagrangien (13.1) :

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{16} D \overline{D}^2 D (\mathbf{V} \overline{\mathbf{V}} + \mathbf{V} Y + \overline{\mathbf{V}} \overline{Y}), \quad (13.19)$$

en composantes. Pour cela, nous allons scinder ce lagrangien en plusieurs parties, afin de simplifier les calculs. Il s'agit en premier lieu de construire une densité lagrangienne pour un superchamp complexe quelconque :

$$16 \times \mathcal{L}_{\mathbf{V} \overline{\mathbf{V}}} = \overline{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \overline{D}^{\dot{\alpha}} (\mathbf{V} \overline{\mathbf{V}}),$$

ce qui, après calcul, nous donne :

$$\begin{aligned} 16 \times \mathcal{L}_{\mathbf{V} \overline{\mathbf{V}}} = & \overline{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \overline{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V} \overline{\mathbf{V}} + \{ \overline{D}_{\dot{\alpha}}, D^2 \} \mathbf{V} \overline{D}^{\dot{\alpha}} \overline{\mathbf{V}} - 2 \overline{D}_{\dot{\alpha}} D^{\alpha} \overline{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V} D_{\alpha} \overline{\mathbf{V}} - 2 D^{\alpha} \overline{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V} \overline{D}_{\dot{\alpha}} D_{\alpha} \overline{\mathbf{V}} \\ & + \overline{D}^2 \mathbf{V} D^2 \overline{\mathbf{V}} + \overline{D}_{\dot{\alpha}} \mathbf{V} \{ D^2, \overline{D}^{\dot{\alpha}} \} \overline{\mathbf{V}} + D^2 \mathbf{V} \overline{D}^2 \overline{\mathbf{V}} \\ & - 2 \overline{D}^{\dot{\alpha}} D^{\alpha} \mathbf{V} D_{\alpha} \overline{D}_{\dot{\alpha}} \overline{\mathbf{V}} - 2 D^{\alpha} \mathbf{V} \overline{D}_{\dot{\alpha}} D_{\alpha} \overline{D}^{\dot{\alpha}} \overline{\mathbf{V}} + \mathbf{V} \overline{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \overline{D}^{\dot{\alpha}} \overline{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (13.20)$$

De plus, il nous faut connaître le couplage de ce superchamp au superchamp de 3-forme :

$$16 \times \mathcal{L}_{\mathbf{V} Y} = \overline{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \overline{D}^{\dot{\alpha}} (\mathbf{V} Y),$$

utilisant les contraintes (11.9) et (11.10), on obtient :

$$\begin{aligned} 16 \times \mathcal{L}_{\mathbf{V} Y} = & \overline{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \overline{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V} Y + -2 \overline{D}_{\dot{\alpha}} D^{\alpha} \overline{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V} D_{\alpha} Y \\ & - 2 D^{\alpha} \overline{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V} \{ \overline{D}_{\dot{\alpha}}, D_{\alpha} \} Y + \overline{D}^2 \mathbf{V} D^2 Y + \overline{D}_{\dot{\alpha}} \mathbf{V} \left[\overline{D}^{\dot{\alpha}}, D^2 \right] Y. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Ainsi, avec les lagrangien (13.20) et (13.21), on a les éléments pour calculer le lagrangien (13.19), responsable de la dualité. On connaît déjà la définition des composantes du superchamp de 3-forme : (11.13)-(11.16), il nous reste à définir les composantes du superchamp complexe général \mathbf{V} :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}| &= \mathbf{B}, & D_\alpha \mathbf{V}| &= \sqrt{2}\mathbf{\Pi}_\alpha, & \overline{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V}| &= \sqrt{2}\overline{\phi}^{\dot{\alpha}}, \\ \overline{D}^2 \mathbf{V}| &= 4\mathbf{G}, & \overline{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha \mathbf{V}| &= \sqrt{2}\mathbf{W}_{\alpha\dot{\alpha}}, & D^2 \mathbf{V}| &= 4\mathbf{H}, \\ D^\alpha \overline{D}^{\dot{\alpha}} D_\alpha \mathbf{V}| &= 4\sqrt{2}\overline{\omega}^{\dot{\alpha}}, & \overline{D}_{\dot{\alpha}} D^\alpha \overline{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V}| &= 4\sqrt{2}\zeta^\alpha, & \overline{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \overline{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V}| &= 16\mathbf{I}, \end{aligned} \quad (13.22)$$

ainsi que celles pour le superchamp complexe conjugué $\overline{\mathbf{V}}$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{V}}| &= \overline{\mathbf{B}}, & D_\alpha \overline{\mathbf{V}}| &= \sqrt{2}\phi_\alpha, & \overline{D}^{\dot{\alpha}} \overline{\mathbf{V}}| &= \sqrt{2}\overline{\Pi}^{\dot{\alpha}}, \\ D^2 \overline{\mathbf{V}}| &= 4\overline{\mathbf{G}}, & D_\alpha \overline{D}_{\dot{\alpha}} \overline{\mathbf{V}}| &= \sqrt{2}\overline{\mathbf{W}}_{\alpha\dot{\alpha}}, & \overline{D}^2 \overline{\mathbf{V}}| &= 4\overline{\mathbf{H}}, \\ \overline{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha \overline{D}^{\dot{\alpha}} \overline{\mathbf{V}}| &= 4\sqrt{2}\omega_\alpha, & D^\alpha \overline{D}^{\dot{\alpha}} D_\alpha \overline{\mathbf{V}}| &= 4\sqrt{2}\overline{\zeta}^{\dot{\alpha}}, & \overline{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \overline{D}^{\dot{\alpha}} \overline{\mathbf{V}}| &= 16\overline{\mathbf{I}}. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Il est aussi nécessaire de connaître les transformations de supersymétrie de ce superchamp générique :

$$\delta_\xi \mathbf{B} = \sqrt{2} (\xi \mathbf{\Pi} + \overline{\xi} \overline{\phi}), \quad (13.24)$$

$$\delta_\xi \mathbf{\Pi}_\alpha = -\sqrt{2} \xi_\alpha \mathbf{H} - (\sigma^m \overline{\xi})_\alpha \mathbf{W}_m, \quad (13.25)$$

$$\delta_\xi \overline{\phi}^{\dot{\alpha}} = -\sqrt{2} \overline{\xi}^{\dot{\alpha}} \mathbf{G} + (\overline{\sigma}^m \xi)^{\dot{\alpha}} (\mathbf{W}_m + i\sqrt{2} \partial_m \mathbf{B}), \quad (13.26)$$

$$\delta_\xi \mathbf{G} = -\sqrt{2} \xi \left(\zeta + \frac{i}{2} \sigma \partial \overline{\phi} \right), \quad (13.27)$$

$$\delta_\xi \mathbf{H} = -\sqrt{2} \overline{\xi} \left(\overline{\omega} + \frac{i}{2} \overline{\sigma} \partial \mathbf{\Pi} \right), \quad (13.28)$$

$$\delta_\xi \mathbf{W}_m = \xi \sigma_m \left(\overline{\omega} - \frac{i}{2} \overline{\sigma}^n \partial_n \mathbf{\Pi} \right) - \overline{\xi} \overline{\sigma}_m \left(\zeta - \frac{i}{2} \sigma^n \partial_n \overline{\phi} \right) - 2i \partial_m (\xi \mathbf{\Pi}), \quad (13.29)$$

$$\delta_\xi \overline{\omega}^{\dot{\alpha}} = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\overline{\sigma}^m \xi)^{\dot{\alpha}} \partial_m \mathbf{H} - \sqrt{2} \overline{\xi}^{\dot{\alpha}} \mathbf{I} + i \overline{\xi}^{\dot{\alpha}} \partial_m \mathbf{W}^m + \frac{i}{2} (\overline{\sigma}^m \sigma^n \overline{\xi})^{\dot{\alpha}} \partial_m \mathbf{W}_n, \quad (13.30)$$

$$\delta_\xi \zeta^\alpha = \frac{i}{\sqrt{2}} (\sigma^m \overline{\xi})_\alpha \partial_m \mathbf{G} + \sqrt{2} \xi_\alpha \mathbf{I} + \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_\alpha \square \mathbf{B} + \frac{i}{2} (\sigma^n \overline{\sigma}^m \xi)_\alpha \partial_m \mathbf{W}_n, \quad (13.31)$$

$$\delta_\xi \mathbf{I} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\xi \sigma^m \partial_m \overline{\omega} - \overline{\xi} \overline{\sigma}^m \partial_m \zeta) - \frac{1}{\sqrt{2}} \square (\xi \mathbf{\Pi}). \quad (13.32)$$

Avec ces définitions, on peut calculer les différentes parties du lagrangien (13.19). On se concentre tout d'abord sur $\mathcal{L}_{\mathbf{V}\overline{\mathbf{V}}}$. Pour ce premier calcul, il est judicieux de se rappeler des relations (11.35)-(11.37), qui vont nous permettre de trouver :

$$\begin{aligned} 16 \times \mathcal{L}_{\mathbf{V}\overline{\mathbf{V}}} &= -16 \partial^m \mathbf{B} \partial_m \overline{\mathbf{B}} - 4i D_\alpha \overline{D}_{\dot{\alpha}} \overline{\mathbf{V}} \overline{\sigma}^{\dot{\alpha}\alpha}_m \partial^m \mathbf{B} - 4i \overline{D}^{\dot{\alpha}} D^\alpha \mathbf{V} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \overline{\mathbf{B}} - 4 \overline{D}^{\dot{\alpha}} D^\alpha \mathbf{V} D_\alpha \overline{D}_{\dot{\alpha}} \overline{\mathbf{V}} \\ &+ D^2 \mathbf{V} \overline{D}^2 \overline{\mathbf{V}} + \overline{D}^2 \mathbf{V} D^2 \overline{\mathbf{V}} + \overline{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \overline{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V} \overline{\mathbf{V}} + \mathbf{B} \overline{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \overline{D}^{\dot{\alpha}} \overline{\mathbf{V}} \\ &- 2 D^\alpha \overline{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha \mathbf{V} \overline{D}^{\dot{\alpha}} \overline{\mathbf{V}} - 2 \overline{D}_{\dot{\alpha}} D^\alpha \overline{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V} D_\alpha \overline{\mathbf{V}} - 2 \overline{D}_{\dot{\alpha}} \mathbf{V} D^\alpha \overline{D}^{\dot{\alpha}} D_\alpha \overline{\mathbf{V}} - 2 D^\alpha \mathbf{V} \overline{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha \overline{D}^{\dot{\alpha}} \overline{\mathbf{V}}, \end{aligned}$$

comme cela, nous obtenons en composantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{V}\overline{\mathbf{V}}} &= -\partial^m \mathbf{B} \partial_m \overline{\mathbf{B}} + \frac{i}{\sqrt{2}} (V^m \partial_m \overline{\mathbf{B}} + \overline{V}^m \partial_m \mathbf{B}) + \mathbf{W}^m \overline{\mathbf{W}}_m + \mathbf{H} \overline{\mathbf{H}} \\ &+ \mathbf{G} \overline{\mathbf{G}} + \mathbf{I} \overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{I}} \mathbf{B} - \zeta \phi - \overline{\zeta} \overline{\phi} - \omega \mathbf{\Pi} - \overline{\omega} \overline{\mathbf{\Pi}}. \end{aligned} \quad (13.33)$$

De la même manière, on calcul $\mathcal{L}_{\mathbf{V}Y}$:

$$16 \times \mathcal{L}_{\mathbf{V}Y} = -16\partial_m \mathbf{B} \partial^m Y - 4i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{D}^{\dot{\alpha}} D^{\alpha} \mathbf{V} \partial_m Y + \bar{D}^2 \mathbf{V} D^2 Y + \bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V} Y \\ - 2\bar{D}_{\dot{\alpha}} D^{\alpha} \bar{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V} D_{\alpha} Y + \bar{D}^{\dot{\alpha}} \mathbf{V} [\bar{D}_{\dot{\alpha}}, D^2] Y.$$

On trouve alors :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}Y} = -\partial_m \mathbf{B} \partial^m Y + \frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{W}^m \partial_m Y - \frac{i}{2} \bar{\phi} \bar{\sigma} \partial \psi - \mathbf{G}(H - i\Lambda) + \mathbf{I}Y - \boldsymbol{\zeta} \psi.$$

Pour l'hermitique conjugué, on obtient :

$$\mathcal{L}_{\overline{\mathbf{V}}\bar{Y}} = -\partial_m \bar{\mathbf{B}} \partial^m \bar{Y} + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{W}}^m \partial_m \bar{Y} - \frac{i}{2} \phi \sigma \partial \bar{\psi} - \bar{\mathbf{G}}(H + i\Lambda) + \bar{\mathbf{I}}\bar{Y} - \bar{\boldsymbol{\zeta}} \bar{\psi}.$$

Pour résumer le lagrangien (13.19) va s'écrire en composantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & \partial^m \mathbf{B} \partial_m \bar{\mathbf{B}} - \frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{W}^m \partial_m \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{W}}^m \partial_m \mathbf{B}) - \mathbf{W}^m \bar{\mathbf{W}}_m - \mathbf{H} \bar{\mathbf{H}} - \mathbf{G} \bar{\mathbf{G}} \quad (13.34) \\ & - \mathbf{I} \bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{I}} \mathbf{B} + \boldsymbol{\zeta} \phi + \bar{\boldsymbol{\zeta}} \bar{\phi} + \boldsymbol{\omega} \Pi + \bar{\boldsymbol{\omega}} \bar{\Pi} \\ & + \partial_m \mathbf{B} \partial^m Y - \frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{W}^m \partial_m Y + \frac{i}{2} \bar{\phi} \bar{\sigma} \partial \psi + \mathbf{G}(H - i\Lambda) - \mathbf{I}Y + \boldsymbol{\zeta} \psi \\ & + \partial_m \bar{\mathbf{B}} \partial^m \bar{Y} - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{W}}^m \partial_m \bar{Y} + \frac{i}{2} \phi \sigma \partial \bar{\psi} + \bar{\mathbf{G}}(H + i\Lambda) - \bar{\mathbf{I}}\bar{Y} + \bar{\boldsymbol{\zeta}} \bar{\psi}. \end{aligned}$$

Variation de \mathcal{L}_I par rapport aux superchamps Y, \bar{Y}

$$\delta_Y \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \mathbf{I} = -\square \mathbf{B} + \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_m \mathbf{W}^m, \quad \delta_{\bar{Y}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{I}} = -\square \bar{\mathbf{B}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_m \bar{\mathbf{W}}^m, \quad (13.35)$$

$$\delta_{\psi} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \boldsymbol{\zeta}_{\alpha} = -\frac{i}{2} (\sigma \partial \bar{\phi})_{\alpha}, \quad \delta_{\bar{\psi}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{\zeta}}^{\dot{\alpha}} = -\frac{i}{2} (\bar{\sigma} \partial \phi)^{\dot{\alpha}}, \quad (13.36)$$

$$\delta_H \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad 0 = \mathbf{G} + \bar{\mathbf{G}}, \quad \delta_{\Lambda} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad 0 = \partial_m (\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}}). \quad (13.37)$$

La dernière équation (13.37) nous donne : $\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}} = 2iK$ où K est un réel.

Le lagrangien (13.34) devient donc :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}\bar{\mathbf{V}}} = -\partial_m \mathbf{B} \partial^m \bar{\mathbf{B}} - \frac{i}{2} (\phi \sigma \partial \bar{\phi} + \bar{\phi} \bar{\sigma} \partial \phi) - \mathbf{W}^m \bar{\mathbf{W}}_m - \mathbf{H} \bar{\mathbf{H}} - \mathbf{G} \bar{\mathbf{G}} + \Pi \boldsymbol{\omega} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \bar{\Pi},$$

où $\mathbf{G} \bar{\mathbf{G}} = K^2$. Après identification des composantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= X, & \phi_{\alpha} &= \eta_{\alpha}, & \mathbf{W}_m &= V_m, \\ \mathbf{H} &= E, & \mathbf{G} &= c, & \Pi_{\alpha} &= \phi_{\alpha}, & \boldsymbol{\omega}_{\alpha} &= \Omega_{\alpha}, \end{aligned}$$

on retrouve bien le lagrangien pour le superchamp contraint X (11.38), mais avec la contrainte : $\bar{D}^2 X + D^2 \bar{X} = 0$, ce qui implique que la constante c apparaissant dans les égalités (11.29) est imaginaire pure. Finalement, on a bien vérifié que le superchamp X est le dual du superchamp Y .

Variation de \mathcal{L}_I par rapport aux superchamps \mathbf{V} , $\bar{\mathbf{V}}$

$$\begin{aligned} \delta_X \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{I}} = -\square (\bar{\mathbf{B}} + Y) \quad \delta_{\bar{X}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \mathbf{I} = -\square (\mathbf{B} + \bar{Y}) \quad (13.38) \\ + \frac{i}{\sqrt{2}} \partial^m \mathbf{W}_m, \quad + \frac{i}{\sqrt{2}} \partial^m \bar{\mathbf{W}}_m, \end{aligned}$$

$$\delta_\phi \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \zeta_\alpha = -\frac{i}{2} (\sigma \partial \bar{\psi})_\alpha, \quad \delta_{\bar{\phi}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} = -\frac{i}{2} (\bar{\sigma} \partial \psi)^{\dot{\alpha}}, \quad (13.39)$$

$$\delta_\Pi \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \omega_\alpha = 0, \quad \delta_{\bar{\Pi}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \bar{\omega}^{\dot{\alpha}} = 0, \quad (13.40)$$

$$\delta_{\mathbf{W}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \mathbf{W}_m = \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_m (\bar{\mathbf{B}} + Y), \quad \delta_{\bar{\mathbf{W}}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{W}}_m = \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_m (\mathbf{B} + \bar{Y}), \quad (13.41)$$

$$\delta_{\mathbf{H}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{H}} = 0, \quad \delta_{\bar{\mathbf{H}}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \mathbf{H} = 0, \quad (13.42)$$

$$\delta_{\mathbf{G}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{G}} = H - i\Lambda, \quad \delta_{\bar{\mathbf{G}}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \mathbf{G} = H + i\Lambda, \quad (13.43)$$

$$\delta_\omega \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \Pi_\alpha = 0, \quad \delta_{\bar{\omega}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \bar{\Pi}^{\dot{\alpha}} = 0, \quad (13.44)$$

$$\delta_\zeta \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \phi_\alpha = \psi_\alpha, \quad \delta_{\bar{\zeta}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \bar{\phi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, \quad (13.45)$$

$$\delta_{\mathbf{I}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{B}} = -Y, \quad \delta_{\bar{\mathbf{I}}} \mathcal{L}_I \Rightarrow \quad \mathbf{B} = -\bar{Y}, \quad (13.46)$$

En portant les deux dernières équations (13.46), dans les égalités (13.41) et (13.38), on a finalement :

$$\mathbf{I} = \mathbf{H} = \mathbf{W}_M = \Pi_\alpha = \omega_\alpha = 0.$$

Si on reporte ces équations dans le lagrangien (13.34), on obtient :

$$\mathcal{L} = -\partial_m Y \partial^m \bar{Y} - \frac{i}{2} (\psi \sigma \partial \bar{\psi} + \bar{\psi} \bar{\sigma} \partial \psi) + H^2 + \Lambda^2$$

qui est le lagrangien cinétique pour le superchamp de 3-forme Y (11.19). Par conséquent, on a bien prouvé la dualité en composantes, et on retrouve bien le résultat donné par le formalisme des superchamps. Il est temps maintenant d'élucider le mécanisme de dualité pour la formulation de type II .

13.6 Dualité X/Y : Formulation en composantes II

Dans la partie précédente, nous avons vérifié la dualité entre superchamp de 3-forme et superchamp X pour le lagrangien de type I , en composantes. Or, on sait que la dualité peut avoir lieu à partir d'une autre forme, où cette fois, c'est le superchamp X qui est connu :

$$16 \times \mathcal{L}_{II} = X\mathbf{V} + \bar{X}\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}\bar{\mathbf{V}}, \quad (13.47)$$

\mathbf{V} étant le superchamp complexe général (13.22). Comme déjà mentionné dans la section 13.4, il est impossible de confirmer la dualité dans le formalisme des superchamps dans ce cas-ci, puisqu'on ne connaît pas le prépotentiel pour X . Ainsi, on va se contenter de vérifier la dualité en composantes.

Nous rappelons ici, la définition du lagrangien $\mathcal{L}_{\mathbf{V}\bar{\mathbf{V}}}$ (13.33) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{V}\bar{\mathbf{V}}} = & -\partial^m \mathbf{B} \partial_m \bar{\mathbf{B}} + \frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{W}^m \partial_m \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{W}}^m \partial_m \mathbf{B}) + \mathbf{W}^m \bar{\mathbf{W}}_m + \mathbf{G}\bar{\mathbf{G}} + \mathbf{H}\bar{\mathbf{H}} + \mathbf{I}\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{I}}\mathbf{B} \\ & -\zeta\phi - \bar{\zeta}\bar{\phi} - \omega\Pi - \bar{\omega}\bar{\Pi}. \end{aligned} \quad (13.48)$$

Pour le couplage $\mathbf{V} - X$ en composantes, on trouve :

$$\mathcal{L}_{X\mathbf{V}} = \partial_m X \partial^m \mathbf{B} + i\sqrt{2} \mathbf{W}^m \partial_m X + V^m \mathbf{W}_m + \mathbf{I}X + \mathbf{H}c + \mathbf{G}E + \frac{i}{2} \psi \sigma \partial \bar{\eta} - \zeta \varphi - \bar{\omega} \eta - \bar{\phi} \Omega,$$

et pour son hermitique conjugué :

$$\mathcal{L}_{\overline{X}\overline{\mathbf{V}}} = \partial_m \overline{X} \partial^m \overline{\mathbf{B}} + i\sqrt{2} \overline{\mathbf{W}}^m \partial_m \overline{X} + \overline{V}^m \overline{\mathbf{W}}_m + \overline{\mathbf{I}}\overline{X} + \overline{\mathbf{H}}\bar{c} + \overline{\mathbf{G}}\bar{E} + \frac{i}{2} \overline{\Pi} \bar{\sigma} \partial \eta - \bar{\zeta} \bar{\varphi} - \omega \eta - \phi \Omega.$$

Pour résumer, le lagrangien (13.47) en composantes, prend la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{II} = & -\partial^m \mathbf{B} \partial_m \overline{\mathbf{B}} + \frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{W}^m \partial_m \overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{W}}^m \partial_m \mathbf{B}) + \mathbf{W}^m \overline{\mathbf{W}}_m + \mathbf{G}\overline{\mathbf{G}} + \mathbf{H}\overline{\mathbf{H}} + \mathbf{I}\overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{I}}\mathbf{B} \\ & - \zeta \phi - \bar{\zeta} \bar{\phi} - \omega \Pi - \bar{\omega} \overline{\Pi} \\ & + \partial_m X \partial^m \mathbf{B} - \frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{W}^m \partial_m X - i\sqrt{2} V^m \partial_m \mathbf{B} - V^m \mathbf{W}_m + \mathbf{I}X + \mathbf{H}c + \mathbf{G}E + \frac{i}{2} \Pi \sigma \partial \bar{\eta} \\ & - \zeta \varphi - \bar{\omega} \eta - \bar{\phi} \Omega \\ & + \partial_m \overline{X} \partial^m \overline{\mathbf{B}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \overline{\mathbf{W}}^m \partial_m \overline{X} - i\sqrt{2} \overline{V}^m \partial_m \overline{\mathbf{B}} - \overline{V}^m \overline{\mathbf{W}}_m + \overline{\mathbf{I}}\overline{X} + \overline{\mathbf{H}}\bar{c} + \overline{\mathbf{G}}\bar{E} + \frac{i}{2} \overline{\Pi} \bar{\sigma} \partial \eta \\ & - \bar{\zeta} \bar{\varphi} - \omega \eta - \phi \Omega. \end{aligned}$$

Variation de \mathcal{L}_{II} par rapport aux superchamps X, \overline{X} :

$$\delta_X \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \quad \mathbf{I} = \square \mathbf{B} - \frac{i}{\sqrt{2}} \partial^m \mathbf{W}_m, \quad \delta_{\overline{X}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{I}} = \square \overline{\mathbf{B}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \partial^m \overline{\mathbf{W}}_m, \quad (13.49)$$

$$\delta_\eta \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \quad \omega_\alpha = \frac{i}{2} (\sigma \partial \overline{\Pi})_\alpha, \quad \delta_{\bar{\eta}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \quad \bar{\omega}^{\dot{\alpha}} = \frac{i}{2} (\bar{\sigma} \partial \Pi)^{\dot{\alpha}}, \quad (13.50)$$

$$\delta_\varphi \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \quad \zeta_\alpha = 0, \quad \delta_{\bar{\varphi}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \quad \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} = 0, \quad (13.51)$$

$$\delta_V \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \quad \mathbf{W}_m = -i\sqrt{2} \partial_m \mathbf{B}, \quad \delta_{\overline{V}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{W}}_m = -i\sqrt{2} \partial_m \overline{\mathbf{B}}, \quad (13.52)$$

$$\delta_E \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \quad \mathbf{G} = 0, \quad \delta_{\bar{E}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{G}} = 0, \quad (13.53)$$

$$\delta_\omega \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \quad \phi_\alpha = 0, \quad \delta_{\bar{\omega}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \quad \bar{\phi}^{\dot{\alpha}} = 0. \quad (13.54)$$

À présent, il faut prendre en compte la constante c . Pour retrouver l'analogie de ce qui a été fait dans la section précédente, il est judicieux de travailler avec un imaginaire pur. Ainsi le terme à minimiser dans l'action est :

$$ic \int d^4x \operatorname{Im}(\mathbf{H}) ;$$

à savoir que la partie imaginaire de \mathbf{H} doit être un terme topologique. Il est ainsi logique de prendre :

$$\operatorname{Im}(\mathbf{H}) = \frac{1}{3} \varepsilon^{klmn} \Sigma_{klmn} \equiv \Lambda.$$

Alors que la partie réelle de \mathbf{H} , n'est elle-même pas contrainte par la relation de correspondance. Donc, on va définir

$$\operatorname{Re}(\mathbf{H}) = -H.$$

Prenant en compte toutes ces considérations, on arrive à :

$$\mathcal{L} = -\partial_m \mathbf{B} \partial^m \overline{\mathbf{B}} - \frac{i}{2} (\Pi \sigma \partial \overline{\Pi} + \overline{\Pi} \bar{\sigma} \partial \Pi) + H^2 + \Lambda^2 - 2ic\Lambda,$$

qui, après identification :

$$\mathbf{B} = Y \quad \text{et} \quad \Pi_\alpha = \psi_\alpha,$$

n'est autre, que le lagrangien cinétique d'une 3-forme (11.19), plus une dérivée totale.

De plus, il est possible de remarquer qu'en insérant les équations du mouvement (13.49-13.54) dans les transformations de supersymétrie du superchamp \mathbf{V} générique (13.24-13.32), on obtient les transformations de supersymétrie pour un superchamp chiral, si on pose $c = 0$; ou bien celles pour un superchamp de 3-forme pour $c \neq 0$. Par conséquent les composantes trouvées par cette relation de dualité, forment bien une représentation irréductible de l'algèbre de supersymétrie.

Variation de \mathcal{L}_{II} par rapport aux superchamps \mathbf{V} , $\bar{\mathbf{V}}$:

$$\delta_{\mathbf{B}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \quad \mathbf{I} = \square (\bar{X} - \mathbf{B}) + \frac{i}{\sqrt{2}} \partial^m (\mathbf{W}_m - 2\bar{V}_m), \quad (13.55)$$

$$\delta_{\bar{\mathbf{B}}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{I}} = \square (X - \bar{\mathbf{B}}) + \frac{i}{\sqrt{2}} \partial^m (\bar{\mathbf{W}}_m - 2V_m), \quad (13.56)$$

$$\delta_{\Pi} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \omega_\alpha = \frac{i}{2} (\sigma \partial \bar{\eta})_\alpha, \quad \delta_{\bar{\Pi}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \bar{\omega}^{\dot{\alpha}} = \frac{i}{2} (\bar{\sigma} \partial \eta)^{\dot{\alpha}}, \quad (13.57)$$

$$\delta_{\phi} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \zeta_\alpha = -\Omega_\alpha, \quad \delta_{\bar{\phi}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\Omega}^{\dot{\alpha}}, \quad (13.58)$$

$$\delta_{\mathbf{H}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \bar{\mathbf{H}} = -c, \quad \delta_{\bar{\mathbf{H}}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \mathbf{H} = -\bar{c}, \quad (13.59)$$

$$\delta_{\mathbf{W}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \mathbf{W}_m = \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_m (\bar{X} - \mathbf{B}) + \bar{V}_m, \quad (13.60)$$

$$\delta_{\bar{\mathbf{W}}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \bar{\mathbf{W}}_m = \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_m (X - \bar{\mathbf{B}}) + V_m, \quad (13.61)$$

$$\delta_{\mathbf{G}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \bar{\mathbf{G}} = -E, \quad \delta_{\bar{\mathbf{G}}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \mathbf{G} = -\bar{E}, \quad (13.62)$$

$$\delta_{\omega} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \Pi_\alpha = -\eta_\alpha, \quad \delta_{\bar{\omega}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \bar{\Pi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}, \quad (13.63)$$

$$\delta_{\zeta} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \phi_\alpha = -\varphi_\alpha, \quad \delta_{\bar{\zeta}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \bar{\phi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}}, \quad (13.64)$$

$$\delta_{\mathbf{I}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \bar{\mathbf{B}} = -X, \quad \delta_{\bar{\mathbf{I}}} \mathcal{L}_{II} \Rightarrow \mathbf{B} = -\bar{X}. \quad (13.65)$$

En utilisant les équations (13.55), (13.56), (13.65), (13.61) et (13.65); on obtient :

$$\bar{\mathbf{W}}^m = V^m + i\sqrt{2}\partial^m X \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{I}} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\partial_m \bar{\mathbf{W}}^m,$$

ce qui nous permet de calculer le lagrangien (13.47) :

$$\mathcal{L} = -\partial_m X \partial^m \bar{X} - \frac{i}{2} (\eta \sigma \partial \bar{\eta} + \bar{\eta} \bar{\sigma} \partial \eta) - V^m \bar{V}_m - E \bar{E} - c \bar{c} + \varphi \Omega + \bar{\varphi} \bar{\Omega},$$

qui n'est autre que le lagrangien cinétique pour le superchamp X (11.38).

En conclusion, nous avons bien montré la relation de correspondance pour la deuxième forme possible de lagrangien et ce, même si nous n'avons pas accès à cette relation dans le langage des superchamps, à cause du manque de connaissance sur le superchamp X .

13.7 Dualité de type I, avec Y comme représentation produit

On réécrit le lagrangien (13.34) en considérant Y et \bar{Y} comme des superchamps composites (11.25-11.28) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I = & +\partial^m \mathbf{B} \partial \bar{\mathbf{B}} - \frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{W}^m \partial_m \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{W}}^m \partial_m \mathbf{B}) - \mathbf{W}^m \bar{\mathbf{W}}_m - \mathbf{H} \bar{\mathbf{H}} - \mathbf{G} \bar{\mathbf{G}} - \mathbf{I} \bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{I}} \mathbf{B} \\
& + \boldsymbol{\zeta} \phi + \bar{\boldsymbol{\zeta}} \bar{\phi} + \boldsymbol{\omega} \Pi + \bar{\boldsymbol{\omega}} \bar{\Pi} \\
& - \partial_m \mathbf{B} \partial^m (\lambda^2) + \frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{W}^m \partial_m (\lambda^2) + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\phi} \bar{\sigma}^c \partial_c (-\sigma_{ba} \lambda f^{ba} + i \lambda D) \\
& + \mathbf{I} \lambda^2 + \sqrt{2} \boldsymbol{\zeta} (-\sigma_{ba} \lambda) f^{ba} + i \lambda D \\
& - \partial_m \bar{\mathbf{B}} \partial^m (\bar{\lambda}^2) + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{W}}^m \partial_m (\bar{\lambda}^2) + \frac{i}{\sqrt{2}} \phi \sigma^c \partial_c (-\bar{\sigma}_{ba} \bar{\lambda} f^{ba} - i \bar{\lambda} D) \\
& + \bar{\mathbf{I}} \bar{\lambda}^2 + \sqrt{2} \bar{\boldsymbol{\zeta}} (-\bar{\sigma}_{ba} \bar{\lambda}) f^{ba} - i \bar{\lambda} D \\
& - Re(\mathbf{G}) (4i \lambda \sigma \partial \bar{\lambda} - 2D^2 + f^{ba} f_{ba}) + i Im(\mathbf{G}) (\varepsilon^{abcd} f_{ab} f_{cd}) .
\end{aligned} \tag{13.66}$$

Variations de \mathcal{L}_I par rapport à W_α , $\bar{W}^{\dot{\alpha}}$

Par rapport à la partie précédente, on fait varier l'action (13.34) par rapport à W_α et $\bar{W}^{\dot{\alpha}}$, ce qui nous donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda \mathcal{L}_I : \\
\left(\mathbf{I} + \square \mathbf{B} - \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_m \mathbf{W}^m \right) \lambda^\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-(\boldsymbol{\zeta} \sigma_{ab})^\alpha f^{ab} + i \boldsymbol{\zeta}^\alpha D \right) - 4i Re(\mathbf{G}) (\partial \bar{\lambda} \bar{\sigma})^\alpha \\
+ \frac{i}{2\sqrt{2}} \left(-(\partial \bar{\phi} \bar{\sigma} \sigma_{ab})^\alpha f^{ba} + i (\partial \bar{\phi} \bar{\sigma})^\alpha D \right), \tag{13.67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\bar{\lambda}} \mathcal{L}_I : \\
\left(\bar{\mathbf{I}} + \square \bar{\mathbf{B}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_m \bar{\mathbf{W}}^m \right) \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(-(\bar{\boldsymbol{\zeta}} \bar{\sigma}_{ab})_{\dot{\alpha}} f^{ab} - i \bar{\boldsymbol{\zeta}}_{\dot{\alpha}} D \right) - 4i Re(\mathbf{G}) (\partial \lambda \sigma)_{\dot{\alpha}} \\
+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-(\partial \phi \sigma \bar{\sigma}_{ab})_{\dot{\alpha}} f^{ab} - i (\partial \phi \sigma)_{\dot{\alpha}} D \right), \tag{13.68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_D \mathcal{L}_I : \\
4\sqrt{2} Re(\mathbf{G}) D = \partial \bar{\phi} \bar{\sigma} \lambda - \partial \phi \sigma \bar{\lambda} + 2i (\bar{\boldsymbol{\zeta}} \bar{\lambda} - \boldsymbol{\zeta} \lambda),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{V^b} \mathcal{L}_I : \\
\partial_a \left(\sqrt{2} \left(Re(\mathbf{G}) f^{ab} - i Im(\mathbf{G}) \tilde{f}^{ab} \right) + \left(\boldsymbol{\zeta} - \frac{i}{2} \partial \bar{\phi} \bar{\sigma} \right) \sigma^{ab} \lambda + \left(\bar{\boldsymbol{\zeta}} - \frac{i}{2} \partial \phi \sigma \right) \bar{\sigma}^{ab} \bar{\lambda} \right) = 0
\end{aligned} \tag{13.69}$$

On peut essayer de mettre les équations précédentes sous une forme évoquant celles, lorsque le superchamp Y n'était pas considéré comme composite (13.35-13.37). Afin de simplifier les expressions, on pose : $\phi = (\boldsymbol{\zeta} - \frac{i}{2} \partial_a \bar{\phi} \bar{\sigma}^a)$, et on se rappelle la définition de Y

(11.24) :

$$\left(\mathbf{I} + \square \mathbf{B} - \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_m \mathbf{W}^m \right) Y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \phi \psi - 4i \operatorname{Re}(\mathbf{G}) (\partial \lambda \sigma \bar{\lambda}), \quad (13.70)$$

$$\left(\bar{\mathbf{I}} + \square \bar{\mathbf{B}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_m \bar{\mathbf{W}}^m \right) \bar{Y} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\phi} \bar{\psi} - 4i \operatorname{Re}(\mathbf{G}) (\partial \lambda \sigma \bar{\lambda}), \quad (13.71)$$

$$2\sqrt{2} \operatorname{Re}(\mathbf{G}) D = i (\phi \lambda - \bar{\phi} \bar{\lambda}), \quad (13.72)$$

$$\partial_a \left(\sqrt{2} \operatorname{Re}(\mathbf{G}) f^{ab} + \phi \sigma^{ab} \lambda + \bar{\phi} \bar{\sigma}^{ab} \bar{\lambda} \right) = i \sqrt{2} \partial_a \left(\operatorname{Im}(\mathbf{G}) \tilde{f}^{ab} \right). \quad (13.73)$$

Il est évident qu'une solution à ce système d'équation est :

$$\phi = \operatorname{Re}(\mathbf{G}) = \partial_a (\operatorname{Im}(\mathbf{G})) = 0. \quad (13.74)$$

Dans ce cas de figure, le problème se ramène alors au système d'équation (13.35-13.37), qui nous a donné le lagrangien cinétique pour le superchamp X (11.38). Cependant, on peut analyser le problème à partir du changement de variable : $Y = W^2$. Dans la section 13.5, nous avons calculé $\delta \mathcal{L}_I / \delta Y = 0$, alors qu'ici, nous avons cherché : $\partial \mathcal{L}_I / \partial W = 0$. Or, le lien entre les deux variation est donné par :

$$\frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta W} = \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta Y} \frac{\delta Y}{\delta W}.$$

Ainsi, la solution à l'équation : $\delta \mathcal{L}_I / \delta W = 0$ est $\delta \mathcal{L}_I / \delta Y = 0$ puisque nous voulons explicitement que $\delta Y / \delta W$ soit non nul pour effectuer le changement de variable.

Chapitre 14

Interactions renormalisables

Nous allons à présent, nous concentrer sur certains couplages possibles entre les différents types de superchamp. Le but étant de montrer comment coupler les nouveaux objets aux multiplets connus formant le MSSM.

Sommaire

14.1	Couplages de jauge pour des superchamp chiraux (rappel)	127
14.2	Couplages de jauge pour le superchamp X	128
14.3	Superpotentiel contenant une 3-forme	130
14.4	Conclusion	132

14.1 Couplages de jauge pour des superchamp chiraux (rappel)

On effectue ici un bref rappel du chapitre 5. Un superchamp chiral peut avoir un poids de Kähler : $\gamma(\Phi) = -\bar{\gamma}(\bar{\Phi})$ quelconque, avec des transformations de jauge, données par :

$$\Phi' = e^{\gamma\alpha}\Phi, \quad \bar{\Phi}' = e^{-\gamma\alpha}\bar{\Phi},$$

où α est un superchamp réel. On reprend les définitions des contraintes et des composantes usuelle pour ce type de superchamp (cf. partie 11.2), en remplaçant les dérivées covariantes de supersymétrie par des dérivées covariantes pour des transformations de supersymétrie et de jauge :

$$D_A \rightarrow \mathcal{D}_A = D_A - \gamma A_A, \quad (14.1)$$

où A est le champ de jauge. Les transformations de supersymétrie sont alors données par :

$$\delta_\xi A = \sqrt{2}\xi\chi, \quad (14.2)$$

$$\delta_\xi \chi_\alpha = \sqrt{2} \left(\xi_\alpha F + i \left(\sigma^m \bar{\xi} \right)_\alpha \mathcal{D}_m A \right), \quad (14.3)$$

$$\delta_\xi F = i\sqrt{2}\bar{\xi} \left(\bar{\sigma} \mathcal{D}\chi + \sqrt{2}\gamma\bar{\lambda}A \right). \quad (14.4)$$

Nous avons déjà calculé le lagrangien invariant à la section 5.5 :

$$16 \times \mathcal{L} = \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \mathcal{D}^2 \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} \Phi \bar{\Phi}.$$

qui en composantes nous a donné :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\mathcal{D}_m A \mathcal{D}^m \bar{A} - \frac{i}{2} (\chi \sigma \mathcal{D} \bar{\chi} + \bar{\chi} \sigma \mathcal{D} \chi) \\ & + F \bar{F} - i\sqrt{2}\gamma (\bar{\lambda} \bar{\chi} A - \lambda \chi \bar{A}) + \gamma A \bar{A} D. \end{aligned} \quad (14.5)$$

14.2 Couplages de jauge pour le superchamp X

À cause des contraintes provenant de la supergravité, le superchamp X possède un poids de Kähler : $\gamma(X) = 2$ et $\bar{\gamma}(\bar{X}) = -2$. Comme précédemment, les transformations de jauge sont données par :

$$X' = e^{\gamma\alpha} X, \quad \bar{X}' = e^{\bar{\gamma}\alpha} \bar{X},$$

où α est un superchamp réel. De même, on utilise les définitions des contraintes et des composantes usuelle pour ce type de superchamp (cf. partie 11.6), et on remplace les dérivées covariantes de supersymétrie par des dérivées covariantes de supersymétrie et de jauge (14.1). Il est alors possible de calculer la nouvelle contrainte :

$$\mathcal{D}^2 \bar{X} = D^2 \bar{X} + \gamma (D^\alpha A_\alpha \bar{X} + 2A^\alpha D_\alpha \bar{X}) + \gamma^2 A^\alpha A_\alpha \bar{X}.$$

Il est important de noter qu'en procédant à la transformation de jauge $\alpha = -X_+$ (5.38), et en se plaçant dans la jauge de Wess-Zumino pour le superchamp V (2.63), il est aisé de vérifier que :

$$\mathcal{D}^2 \bar{X}| = D^2 \bar{X}|,$$

puisque $A_\alpha| = 0$, dans cette jauge, d'une part et d'autre part la contrainte conventionnelle (5.11) implique $D^\alpha A_\alpha = 0$.

Ensuite, la contrainte (5.13), nous donne : $\bar{D}^{\dot{\alpha}} A^\alpha = i\bar{\sigma}_m^{\dot{\alpha}\alpha} A^m$. Donc, dans les mêmes conditions de jauge, le terme :

$$\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} \mathcal{D}^2 \bar{X}| = \bar{D}^{\dot{\alpha}} D^2 \bar{X}| + 2\gamma \bar{D}^{\dot{\alpha}} A^\alpha D_\alpha \bar{X}|,$$

est nul pour

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} D^2 \bar{X}| = -2i\sqrt{2} (\bar{\sigma}^m \eta)^{\dot{\alpha}} a_m.$$

De même, on a :

$$\bar{\mathcal{D}}^2 \mathcal{D}^2 \bar{X}| = \bar{D}^2 D^2 \bar{X}| + 2\gamma \bar{D}^2 A^\alpha D_\alpha \bar{X}| + 4\gamma \bar{D}^{\dot{\alpha}} A^\alpha \bar{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha \bar{X}| + 2\gamma^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}} A^\alpha \bar{D}_{\dot{\alpha}} A_\alpha \bar{X}|,$$

qui est nul pour

$$\bar{D}^2 D^2 \bar{X}| = -8\sqrt{2}\gamma a^m (\bar{V}_m + i\sqrt{2}\partial_m \bar{X} + \lambda \eta) + 4\gamma^2 a^m a_m \bar{X}.$$

Par conséquent, la contrainte (11.29) originelle ne change pas, ni le contenu en champ du multiplet. Ainsi, cette représentation de type $(0,1/2)$, admet d'être chargée sous un groupe de symétrie de type $U(1)$.

Il est nécessaire, de calculer l'effet de ce changement de définition sur les transformations de supersymétrie :

$$\delta_{WZ}X = \xi^\alpha \mathcal{D}_\alpha X + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} X,$$

ce qui donne pour les composantes :

$$\delta_\xi X = \sqrt{2} (\xi\varphi + \bar{\xi}\bar{\eta}), \quad (14.6)$$

$$\delta_\xi \varphi_\alpha = -\sqrt{2} \xi_\alpha E - (\sigma^m \bar{\xi})_\alpha V_m, \quad (14.7)$$

$$\delta_\xi \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} = -\sqrt{2} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} c - (\bar{\sigma}^m \xi)^{\dot{\alpha}} (V_m + i\sqrt{2} \mathcal{D}_m X), \quad (14.8)$$

$$\delta_\xi E = -\sqrt{2} \bar{\xi} \left(\bar{\Omega} + \frac{i}{2} \bar{\sigma} \mathcal{D} \varphi \right), \quad (14.9)$$

$$\delta_\xi V_m = \xi \left(\sigma_m \bar{\Omega} + \frac{i}{2} \sigma^n \bar{\sigma}_m \mathcal{D}_n \varphi \right) + i \bar{\xi} \bar{\sigma}_m \sigma^n \mathcal{D}_n \bar{\eta} - i \xi \mathcal{D}_m \varphi - i \sqrt{2} \gamma \bar{\xi} \bar{\sigma}_m \lambda X, \quad (14.10)$$

$$\begin{aligned} \delta_\xi \bar{\Omega}^{\dot{\alpha}} &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (\bar{\sigma}^m \xi)^{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_m E - \sqrt{2} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \mathcal{D}^m \mathcal{D}_m X + i \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_m V^m - \frac{i}{2} (\bar{\sigma}^n \sigma^m \bar{\xi})^{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_m V_n \\ &\quad + i(3\gamma - 2) \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \lambda \varphi + 2i(\gamma + 1) \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{\lambda} \bar{\eta} - \gamma \xi \varphi \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} - \sqrt{2} \gamma \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} D X. \end{aligned} \quad (14.11)$$

On peut calculer de même, les transformations de supersymétrie pour le superchamp complexe conjugué :

$$\delta_\xi \bar{X} = \sqrt{2} (\xi\eta + \bar{\xi}\bar{\varphi}), \quad (14.12)$$

$$\delta_\xi \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} = -\sqrt{2} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{E} - (\bar{\sigma}^m \xi)^{\dot{\alpha}} \bar{V}_m, \quad (14.13)$$

$$\delta_\xi \eta_\alpha = -\sqrt{2} \xi_\alpha \bar{c} + (\sigma^m \bar{\xi})_\alpha (\bar{V}_m + i\sqrt{2} \mathcal{D}_m \bar{X}), \quad (14.14)$$

$$\delta_\xi \bar{E} = -\sqrt{2} \xi \left(\Omega + \frac{i}{2} \sigma^m \mathcal{D}_m \bar{\varphi} \right), \quad (14.15)$$

$$\delta_\xi \bar{V}_m = \bar{\xi} \left(\bar{\sigma}_m \Omega + \frac{i}{2} \bar{\sigma}^n \sigma_m \mathcal{D}_n \bar{\varphi} \right) + i \xi \sigma_m \bar{\sigma}^n \mathcal{D}_n \eta - i \bar{\xi} \mathcal{D}_m \bar{\varphi} - i \sqrt{2} \gamma \xi \sigma_m \bar{\lambda} \bar{X}, \quad (14.16)$$

$$\begin{aligned} \delta_\xi \Omega_\alpha &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (\sigma^m \bar{\xi})_\alpha \mathcal{D}_m \bar{E} - \sqrt{2} \xi_\alpha \mathcal{D}^m \mathcal{D}_m \bar{X} + i \xi_\alpha \mathcal{D}_m \bar{V}^m - \frac{i}{2} (\sigma^n \bar{\sigma}^m \xi)_\alpha \mathcal{D}_m \bar{V}_n \\ &\quad + i(3\bar{\gamma} + 2i) \xi_\alpha \bar{\lambda} \bar{\varphi} + 2i(\bar{\gamma} - 1) \xi_\alpha \lambda \eta - i \bar{\gamma} \bar{\xi} \bar{\varphi} \lambda_\alpha + \sqrt{2} \bar{\gamma} \xi_\alpha D \bar{X}. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Il est alors possible de calculer le lagrangien :

$$16 \times \mathcal{L} = -\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \mathcal{D}^2 \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} X \bar{X}.$$

Pour cela, il est utile de se remémorer les formules (5.50-5.52) , afin de trouver :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\mathcal{D}_m X \mathcal{D}^m \bar{X} - \frac{i}{2} (\eta \sigma \mathcal{D} \bar{\eta} + \bar{\eta} \bar{\sigma} \mathcal{D} \eta) - V_m \bar{V}^m - E \bar{E} - c \bar{c} + \varphi \Omega + \bar{\varphi} \bar{\Omega} \\ &\quad - i\sqrt{2} \gamma (\bar{\lambda} \bar{\eta} \bar{X} - \lambda \eta X) - \gamma X \bar{X} D. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Il est intéressant de remarquer que la structure de ce lagrangien pour le champ scalaire X est similaire à celle pour le champ scalaire A dans le lagrangien (14.5). Autrement dit, on va pouvoir construire l'analogue d'un mécanisme de brisure de type Fayet-Iliopoulos avec le superchamp X ; et on en tirera la même phénoménologie qu'avec des superchamps chiraux.

14.3 Superpotentiel contenant une 3-forme

La contrainte supplémentaire pour le superchamp de 3-forme (11.10) ne sera pas linéaire, *i.e.* une combinaison linéaire de superchamp de 3-forme ne va pas être lui-même un superchamp de 3-forme. Cependant, une telle combinaison sera chirale. Cette dernière caractéristique, nous permettra tout de même d'écrire un superpotentiel pour le superchamp Y . De plus, comme on l'a déjà mentionné, le superchamp de 3-forme est chargé sous R-symétrie. Le superpotentiel que l'on pourra construire sera limité par cette contrainte. Enfin, le fait de se restreindre à des lagrangiens renormalisables, nous impose des termes cubiques dans les superchamps au maximum. Ainsi, on peut écrire le superpotentiel suivant :

$$\tilde{W}(Y, \Phi) = aY + b_i Y \Phi_i + c_{ij} Y \Phi_i \Phi_j, \quad (14.19)$$

avec a , b_i et c_{ij} , des termes symétriques dans leurs indices, ayant pour dimensions respectives : $[masse]^2$, $[masse]^1$ et $[masse]^0$. Le lagrangien total s'écrit donc :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16} \bar{D}^2 D^2 (Y \bar{Y} + \Phi_i \bar{\Phi}_i) - \frac{1}{4} \left(D^2 \tilde{W}(Y, \Phi) + \bar{D}^2 \tilde{W}(\bar{Y}, \bar{\Phi}) \right),$$

soit en composantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & H^2 + \Lambda^2 - \partial^m Y \partial_m \bar{Y} - \frac{i}{2} (\psi \sigma \partial \bar{\psi} + \bar{\psi} \bar{\sigma} \partial \psi) \\ & + F_i \bar{F}_i - \partial^m A_i \partial_m \bar{A}_i - \frac{i}{2} (\chi_i \sigma \partial \bar{\chi}_i + \bar{\chi}_i \bar{\sigma} \partial \chi_i) + 2aH \\ & - \left((-H + i\Lambda) (b_i A_i + c_{ij} A_i A_j) + \frac{1}{2} \psi \chi_i (b_i + c_{ij} A_j) - Y \left(b_i F_i + c_{ij} A_i F_j - \frac{c_{ij}}{2} \chi_i \chi_j \right) + c.c. \right). \end{aligned}$$

En utilisant la notation (4.27), on peut avoir une écriture plus condensée :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Y\bar{Y}} + \mathcal{L}_{\Phi_i \bar{\Phi}_i} + \left(\tilde{F} W_Y + F_i \tilde{W}_{A_i} - \frac{1}{2} \left(\psi \chi_i \tilde{W}_{Y A_i} + \chi_i \chi_j \right) + h.c. \right) \quad (14.20)$$

Il est attrayant, comme toujours, dans une théorie supersymétrique de commencer par étudier les équations du mouvement pour les champs auxiliaires. Il est tout aussi intéressant de connaître l'équation du mouvement pour le champ scalaire Y . On trouve :

$$\delta_Y \mathcal{L} \Rightarrow -\square \bar{Y} = \tilde{W}_{A_i Y} F_i + \tilde{W}_{Y Y} \tilde{F}, \quad (14.21)$$

$$\delta_{F_i} \mathcal{L} \Rightarrow \bar{F}_i = -\tilde{W}_{A_i}, \quad (14.22)$$

$$\delta_H \mathcal{L} \Rightarrow H = -Re \left(\tilde{W}_Y \right), \quad (14.23)$$

$$\delta_\Lambda \mathcal{L} \Rightarrow 0 = \partial_m \left(\Lambda + Im(\tilde{W}_Y(Y)) \right), \quad (14.24)$$

$$\Leftrightarrow \Lambda = -Im(\tilde{W}_Y(Y)) + K. \quad (14.25)$$

Si on utilise la méthode habituelle, *i.e.* insérer les équations du mouvement des champs auxiliaires dans le lagrangien (14.20) afin de trouver le lagrangien effectif¹, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & -\partial^m Y \partial_m \bar{Y} - \frac{i}{2} (\psi \sigma \partial \bar{\psi} + \bar{\psi} \bar{\sigma} \partial \psi) - \partial^m A_i \partial_m \bar{A}_i - \frac{i}{2} (\chi_i \sigma \partial \bar{\chi}_i + \bar{\chi}_i \bar{\sigma} \partial \chi_i) \\ & - \left| \tilde{W}_{A_i} \right|^2 - \left| \tilde{W}_Y \right|^2 + K^2, \end{aligned}$$

¹Le résultat est le même avec une redéfinition des champs auxiliaires, qui est plus juste pour une théorie quantique.

avec comme équation du mouvement pour Y :

$$\square Y = \tilde{W}_{A_i Y} \tilde{W}_{A_i} + \tilde{W}_{Y Y} \tilde{W}_Y, \quad (14.26)$$

qui est une équation différente de celle que l'on avait auparavant (14.21) prenant en compte les équations pour les champs auxiliaires (14.22), (14.23) et (14.25). On peut remarquer que dans l'équation (14.26) provenant du lagrangien effectif, il manque l'équivalent d'un terme linéaire en Y apparaissant dans (14.25). Ce phénomène provient du caractère non algébrique de l'équation pour Λ (14.24). Dans ce cas précis, il n'est pas possible d'utiliser l'équation du mouvement pour Λ dans le lagrangien. Nous allons montrer une manière de contourner ce problème ultérieurement en utilisant une équivalence entre représentation avec un superchamp de 3-forme et représentation chirale.

La présence de la constante dans l'équation (14.25), découle du caractère non algébrique de l'équation du mouvement pour Λ (14.24), puisque ce champ est en fait un tenseur de champ pour une 3-forme. Il est intéressant de noter que le terme linéaire présent dans le potentiel (14.19), va générer une constante réelle pure dans le potentiel effectif (qui est un ingrédient nécessaire pour briser la supersymétrie), alors que c'est le champ de 3-forme (partie imaginaire de \tilde{F}) qui va nous procurer la partie imaginaire de la constante présente dans le potentiel effectif. Justement, en terme de potentiel effectif, la présence de cette constante imaginaire est l'équivalent d'un terme linéaire dans le superpotentiel. Il est alors possible de réaliser une brisure d'O'Raifeartaigh sans terme linéaire dans le superpotentiel, si on utilise à bon escient un superchamp de 3-forme.

Si on retourne à présent aux équation du mouvement pour le champ auxiliaire :

$$\tilde{F} = H - i\Lambda,$$

on trouve immédiatement :

$$\tilde{F} = -\overline{\tilde{W}}_{\bar{Y}} - iK, \quad (14.27)$$

à comparer avec l'équation (4.32). On peut ainsi refaire l'analyse d'O'Raifeartaigh (section 6.2), à partir de l'égalité (6.3) où on a dorénavant $-iK_i + \lambda_i$ pour coefficient du terme linéaire.

Ceci revient à dire que l'on peut avoir une formulation chirale équivalente en ajoutant au superpotentiel \tilde{W} , un terme linéaire pour chaque superchamp de 3-forme Y et en les remplaçant par des superchamps chiraux $\Psi = (A_\Psi, \chi_\Psi, F_\Psi)$:

$$W(\Psi, \Phi) = \tilde{W}(\Psi, \Phi) - iK\Psi,$$

les équations du mouvements pour les champs auxiliaires F_Ψ sont alors algébriques :

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{F}_\Psi} \mathcal{L} = 0 &\Rightarrow F_\Psi = -\overline{W}_{\bar{A}_\Psi} = -\overline{\tilde{W}}_{\bar{A}_\Psi} - iK, \\ \delta_{F_\Psi} \mathcal{L} = 0 &\Rightarrow \bar{F}_\Psi = -W_{A_\Psi} = -\tilde{W}_{A_\Psi} + iK. \end{aligned}$$

Il est alors possible de redéfinir le champ auxiliaire : $\mathcal{F}_\Psi = F_\Psi + \tilde{W}_{A_\Psi} + iK$. Le potentiel effectif s'écrit alors de manière usuelle, les équations pour les champs auxiliaires étant dorénavant algébriques :

$$\begin{aligned} V_{eff} &= |W_{\mathcal{A}}|^2 \quad \text{avec } \mathcal{A} = (A_\Psi, A), \\ &= \left| \tilde{W}_{\mathcal{A}} \right|^2 + K^2 + iK \left(\tilde{W}_{A_\Psi} - \overline{\tilde{W}}_{\bar{A}_\Psi} \right), \end{aligned}$$

Il nous est alors permis de calculer l'équation du mouvement pour le champ scalaire A_Ψ :

$$-\square \bar{A}_\Psi = \tilde{W}_{A_i A_\Psi} F_i + \tilde{W}_{A_\Psi A_\Psi} (\bar{W}_{\bar{A}_\Psi}(\bar{A}) + iK).$$

Cette équation étant identique à celle pour Y (14.21), une fois les équations du mouvement pour H (14.23) et Λ (14.25) prises en compte. De la sorte, on a bien prouvé qu'il y avait équivalence entre les deux types de formulation.

Comme déjà mentionné précédemment, une application possible est le mécanisme de brisure de O'Raifeartaigh vu à la section 6.3. Ici, il est intéressant de remplacer le superchamp chiral neutre par un superchamp de 3-forme, en oubliant le terme linéaire :

$$W(Y, \Phi_1, \Phi_2) = gY\Phi_1^2 + m\Phi_1\Phi_2,$$

ce qui donne :

$$V_{eff} = m^2 |A_1|^2 + |2gYA_1 + mA_2|^2 + |gA_1^2 - iK|^2,$$

qui est exactement le potentiel effectif d'O'Raifeartaigh (6.9) avec A_0 remplacé par Y et λ par $-iK$. Il est important de noter qu'en utilisant un superchamp de 3-forme, on s'affranchit du terme linéaire nécessaire à la brisure, puisque celui-ci arrive naturellement par les équations du mouvement pour la 3-forme.

14.4 Conclusion

En conclusion, dans cette partie, nous avons mis en évidence différentes représentations possibles en termes de champs locaux de la représentation $(0,1/2)$ (voir tableau (14.1)). Nous avons mis en évidence que la principale différence entre ces représentations résidait dans les champs auxiliaires, dont certains sont même des champs de jauge. On a particulièrement étudié, le multiplet X , qui semble contenir dans ses composantes une constante qui génère des lois de transformations inhomogènes pour le fermion de Majorana. Par conséquent, ce multiplet qui est une représentation de l'algèbre de supersymétrie semble contenir en lui, la signature de la brisure spontanée de supersymétrie au niveau du vide, de la même manière que l'équation du mouvement pour la 3-forme dans le superchamp Y génère une constante qui semble briser la supersymétrie au niveau du vide. Il reste à trouver comment propager cette brisure à d'autres champs, les couplages de ces superchamps à d'autres étant fortement contraints à cause des poids de Kähler qui leurs sont associés. On peut remarquer que dans le cas chiral, un potentiel qui génère une énergie du vide non nulle, mais qui ne change pas la dégénérescence du spectre de masse, justifie l'appellation de champ factice pour le champ associé à cette brisure.

Ensuite nous avons rappelé la notion de dualité sans supersymétrie entre différents objets. Puis, nous en avons montré l'extension supersymétrique qui relie différentes représentations de type $(0,1/2)$. En particulier, nous avons insisté sur la dualité superchamp de 3-forme/superchamp X , qui fait apparaître le lien entre constante et tenseur de champ d'une 3-forme en tant que terme topologique.

On a fini par étudier le mécanisme de brisure d'O'Raifeartaigh, en utilisant notre connaissance du superchamp de 3-forme, ce qui nous a affranchi de la nécessité d'insérer un terme linéaire dans le superpotentiel, celui-ci arrivant de façon naturelle lorsqu'on utilise l'équation du mouvement pour la 3-forme. Le but de cette partie, était de montrer au lecteur que la supersymétrie ne se limite pas aux superchamps chiraux, mais qu'il existe d'autres représentations possibles de l'algèbre, plus ou moins contraignantes. Leurs utilisations peut se révéler fondamentales dans l'étude du mécanisme de brisure de supersymétrie.

Type	Contraintes	Champs propageant	Champs auxiliaires
Chiral : $\Phi, \bar{\Phi}$	$\bar{D}^{\dot{\alpha}}\Phi = 0, D_{\alpha}\bar{\Phi} = 0$	A, χ	F
Linéaire réel : L	$D^2L = \bar{D}^2L = 0$	L, Λ, b_{mn}	$/$
3-forme : Y, \bar{Y}	$\bar{D}^{\dot{\alpha}}Y = 0, D_{\alpha}\bar{Y} = 0,$ $D^2Y - \bar{D}^2\bar{Y} = 0$	Y, ψ, C_{lmn}	H
X	$\bar{D}^2X - D^2\bar{X} = c$	X, η	$E, V^m, c, \varphi, \Omega$

TAB. 14.1 – Résumé des représentations du multiplet $(0,1/2)$ étudiés dans cette thèse.

Annexe A

Conventions et définitions de base

Nous collectons ici les définitions, conventions et identités impliquant les objets qui sont fréquemment utilisés dans nos calculs. Notre intention n'est pas d'être exhaustif mais d'essayer de présenter un ensemble de formules et de relations qui sont utiles pour exécuter des calculs explicites.

Sommaire

A.1	Quantités basiques dans $SO(3,1)$ et $SL(2,\mathbb{C})$	135
A.2	Relations impliquant plus de deux matrices σ	138
A.3	Notation spinorielle pour les vecteurs	139
A.4	Spineurs	139
A.5	Relations utiles	140

A.1 Quantités basiques dans $SO(3,1)$ et $SL(2,\mathbb{C})$

On utilise le tenseur métrique, avec la convention suivante :

$$[\eta_{ab}] = \text{diag}(-1, +1, +1, +1), \quad (\text{A.1})$$

et son inverse, défini par :

$$\eta_{ac}\eta^{cb} = \delta_a^b. \quad (\text{A.2})$$

Le tenseur totalement antisymétrique ε_{abcd} , quant à lui, est normalisé tel que :

$$\varepsilon_{0123} = +1, \quad \varepsilon^{0123} = -1. \quad (\text{A.3})$$

Le produit de deux tenseurs ε est donné par :

$$\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{efgh} = -\delta_{efgh}^{abcd}, \quad (\text{A.4})$$

où le symbole de Kronecker multi-index est défini comme :

$$\delta_{efgh}^{abcd} \equiv \det[\delta_j^i], \quad (\text{A.5})$$

avec $i = a, b, c, d$ et $j = e, f, g, h$. En utilisant une notation moins formelle, ceci peut être écrit comme :

$$\delta_{efgh}^{abcd} = \delta_e^a \delta_{fgh}^{bcd} - \delta_f^a \delta_{ghe}^{bcd} + \delta_g^a \delta_{hef}^{bcd} - \delta_h^a \delta_{efg}^{bcd}, \quad (\text{A.6})$$

$$\delta_{fgh}^{bcd} = \delta_f^b \delta_{gh}^{cd} + \delta_g^b \delta_{hf}^{cd} + \delta_h^b \delta_{fg}^{cd}, \quad (\text{A.7})$$

$$\delta_{gh}^{cd} = \delta_g^c \delta_h^d - \delta_h^c \delta_g^d. \quad (\text{A.8})$$

Ainsi, on a les égalités suivantes pour les contractions d'indices de deux tenseurs totalement antisymétriques ε :

$$\varepsilon^{abcd} \varepsilon_{efgd} = -\delta_{efg}^{abc}, \quad (\text{A.9})$$

$$\varepsilon^{abcd} \varepsilon_{efcd} = -2\delta_{ef}^{ab}, \quad (\text{A.10})$$

$$\varepsilon^{abcd} \varepsilon_{ebcd} = -6\delta_e^a, \quad (\text{A.11})$$

$$\varepsilon^{abcd} \varepsilon_{abcd} = -24. \quad (\text{A.12})$$

On fait aussi une utilisation intensive du tenseur totalement antisymétrique à deux dimensions :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \quad (\text{A.13})$$

avec la convention : $\epsilon_{21} = \epsilon^{12} = +1$. Ce tenseur joue en quelque sorte le rôle d'une métrique pour les indices des spineurs de $SL(2, \mathbb{C})$, comme on le montrera ultérieurement. Avec cette définition, on a les égalités suivantes :

$$\epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} = -\delta_\gamma^\alpha \delta_\delta^\beta + \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta, \quad (\text{A.14})$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha. \quad (\text{A.15})$$

On a les mêmes définitions et identités pour le tenseur avec les indices pointés, $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$.

Les spineurs ψ de Weyl contiennent deux variables de Grassmann (anticommutantes) ψ_1, ψ_2 . Pour de telles variables, on a :

$$\begin{aligned} \psi_1 \psi_1 &= 0 \\ \psi_2 \psi_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \psi_1 \psi_2 = -\psi_2 \psi_1,$$

ce qui s'écrit de manière formelle :

$$\psi_\alpha \psi_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \psi_\alpha \psi_\beta = -\psi_\beta \psi_\alpha.$$

Le tenseur ϵ monte et descend les indices des spineurs. Pour un spineur à deux composantes ψ_α , cette propriété s'écrit :

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta.$$

La convention standard pour la sommation sur les indices spinoriels est la suivante :

$$\psi \chi = \psi^\alpha \chi_\alpha = \chi \psi, \quad \bar{\psi} \bar{\chi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi} \bar{\psi}.$$

On a

$$\begin{aligned} \psi^2 &= \psi \psi = \psi^\alpha \psi_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta \psi_\alpha \\ &= \epsilon^{12} \psi_2 \psi_1 + \epsilon^{21} \psi_1 \psi_2 = 2\psi_2 \psi_1 = -2\psi_1 \psi_2, \end{aligned}$$

mais aussi :

$$\psi_\alpha \psi_\beta = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \psi^2, \quad \psi^\alpha \psi^\beta = -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \psi^2.$$

Les tenseurs $V_{\alpha\dot{\alpha}}$ possédant une paire d'indices dont un indice pointé et un autre non pointé sont équivalents à des vecteurs V_m . Les matrices qui effectuent la transition entre les représentations :

$$V_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m V_m,$$

sont les matrices de Pauli :

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

ou bien : $\sigma^m = (I_2, \vec{\sigma})$ de manière condensée (que l'on utilise avec la convention suivante : $(\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}}$). On utilise aussi les matrices $\bar{\sigma}^m = (I_2, -\vec{\sigma})$, ce qui se réécrit en faisant apparaître les indices spinoriels :

$$\bar{\sigma}^m{}^{\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\beta} \epsilon^{\alpha\gamma} \sigma_{\beta\gamma}^m = -(\epsilon \sigma^m \epsilon)^{\dot{\alpha}\alpha}. \quad (\text{A.17})$$

Une autre forme utile de l'égalité précédente est :

$$(\sigma^m \epsilon)_\alpha{}^{\dot{\alpha}} = (\bar{\sigma}^m \epsilon)^{\dot{\alpha}}{}_\alpha, \quad (\epsilon \bar{\sigma}^m)_{\dot{\alpha}}{}^\alpha = (\epsilon \sigma^m)^\alpha{}_{\dot{\alpha}}. \quad (\text{A.18})$$

Ces matrices forment une algèbre de Clifford :

$$(\sigma^a \bar{\sigma}^b + \sigma^b \bar{\sigma}^a)_\alpha{}^\beta = -2\eta^{ab} \delta_\alpha^\beta, \quad (\text{A.19})$$

$$(\bar{\sigma}^a \sigma^b + \bar{\sigma}^b \sigma^a)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = -2\eta^{ab} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}. \quad (\text{A.20})$$

Le produit de deux matrices de Pauli, peut être écrit comme :

$$\sigma^a \bar{\sigma}^b = -\eta^{ab} + 2\sigma^{ab}, \quad (\text{A.21})$$

$$\bar{\sigma}^a \sigma^b = -\eta^{ab} + 2\bar{\sigma}^{ab}, \quad (\text{A.22})$$

avec le tenseur antisymétrique de trace nulle défini comme :

$$(\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta = \frac{1}{4} (\sigma^a \bar{\sigma}^b - \sigma^b \bar{\sigma}^a)_\alpha{}^\beta, \quad (\text{A.23})$$

$$(\bar{\sigma}^{ab})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = (\bar{\sigma}^a \sigma^b - \bar{\sigma}^b \sigma^a)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}. \quad (\text{A.24})$$

Ce tenseur σ^{ab} (resp. $\bar{\sigma}^{ab}$) est self-dual (resp. antiself-dual) :

$$\varepsilon_{abcd} \sigma^{cd} = -2i \sigma_{ab}, \quad \varepsilon_{abcd} \bar{\sigma}^{cd} = +2i \bar{\sigma}_{ab}, \quad (\text{A.25})$$

et satisfont, comme conséquence de la trace nulle, les identités suivantes :

$$(\epsilon \sigma^{ab} \epsilon)_\alpha{}^\beta = -(\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta, \quad (\epsilon \bar{\sigma}^{ab} \epsilon)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = -(\bar{\sigma}^{ab})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}, \quad (\text{A.26})$$

$$(\epsilon \sigma^{ab})^{\alpha\beta} = (\epsilon \sigma^{ab})^{\beta\alpha}, \quad (\epsilon \bar{\sigma}^{ab})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (\epsilon \bar{\sigma}^{ab})_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}. \quad (\text{A.27})$$

D'autres égalités intéressantes, provenant de l'algèbre de Clifford des matrices σ , sont :

$$\text{tr} (\sigma^a \bar{\sigma}^b) = -2\eta^{ab}, \quad (\text{A.28})$$

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a \bar{\sigma}_a{}^{\dot{\beta}\beta} = -2\delta_\alpha^\beta \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \quad (\text{A.29})$$

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a \sigma_a{}_{\beta\dot{\beta}} = -2\epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \quad (\text{A.30})$$

$$\bar{\sigma}^a{}^{\dot{\alpha}\alpha} \bar{\sigma}_a{}_{\dot{\beta}\beta} = -2\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.31})$$

qui peuvent être vues comme un cas particulier des identités de Fierz :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a \sigma_{\beta\dot{\beta}}^b &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta^{ab} + \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\sigma^{ab} \varepsilon)_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta} (\varepsilon \bar{\sigma}^{ab})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \\ &\quad + (\sigma^a_f \varepsilon)_{\alpha\beta} (\varepsilon \bar{\sigma}^{bf})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + (\sigma^b_f \varepsilon)_{\alpha\beta} (\varepsilon \bar{\sigma}^{af})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} . \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

A.2 Relations impliquant plus de deux matrices σ

Pour le produit de trois matrices sigma, les égalités suivantes sont utiles :

$$\begin{aligned} (\sigma^{ab} \sigma^c)_{\alpha\dot{\beta}} &= \frac{1}{2} (\eta^{ac} \eta^{bd} - \eta^{bc} \eta^{ad} + i \varepsilon^{abcd}) \sigma_d{}_{\alpha\dot{\beta}}, \\ (\sigma^a \bar{\sigma}^{bc})_{\alpha\dot{\beta}} &= \frac{1}{2} (\eta^{ac} \eta^{bd} - \eta^{bc} \eta^{ad} + i \varepsilon^{abcd}) \sigma_d{}_{\alpha\dot{\beta}}, \\ (\bar{\sigma}^{ab} \bar{\sigma}^c)^{\dot{\beta}\alpha} &= \frac{1}{2} (\eta^{ac} \eta^{bd} - \eta^{bc} \eta^{ad} - i \varepsilon^{abcd}) \bar{\sigma}_d{}^{\dot{\beta}\alpha}, \\ (\bar{\sigma}^a \sigma^{bc})^{\dot{\beta}\alpha} &= \frac{1}{2} (\eta^{ac} \eta^{bd} - \eta^{bc} \eta^{ad} - i \varepsilon^{abcd}) \bar{\sigma}_d{}^{\dot{\beta}\alpha}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\sigma^a \bar{\sigma}^b \sigma^c)_{\alpha\dot{\alpha}} &= (-\eta^{ab} \eta^{cd} + \eta^{ca} \eta^{bd} - \eta^{bc} \eta^{ad} + i \varepsilon^{abcd}) \sigma_d{}_{\alpha\dot{\alpha}}, \\ (\bar{\sigma}^a \sigma^b \bar{\sigma}^c)^{\dot{\alpha}\alpha} &= (-\eta^{ab} \eta^{cd} + \eta^{ca} \eta^{bd} - \eta^{bc} \eta^{ad} - i \varepsilon^{abcd}) \bar{\sigma}_d{}^{\dot{\alpha}\alpha}. \end{aligned}$$

Il est aussi utile de connaître les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_b{}_{\beta\dot{\beta}} (\sigma^{ab})_{\alpha}{}^{\gamma} &= -\delta_{\beta}^{\gamma} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^a + \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\gamma} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^a, \\ \sigma_b{}_{\beta\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^{ab})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\gamma}} &= +\delta_{\beta}^{\dot{\gamma}} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^a - \frac{1}{2} \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^a, \\ \bar{\sigma}_b{}^{\dot{\beta}\beta} (\bar{\sigma}^{ab})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\gamma}} &= -\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}} \bar{\sigma}^a{}_{\dot{\beta}\beta} + \frac{1}{2} \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}} \bar{\sigma}^a{}_{\dot{\beta}\beta}, \\ \bar{\sigma}_b{}^{\dot{\beta}\beta} (\sigma^{ab})_{\alpha}{}^{\gamma} &= +\delta_{\alpha}^{\gamma} \bar{\sigma}^a{}_{\dot{\beta}\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\gamma} \bar{\sigma}^a{}_{\dot{\beta}\beta}, \\ tr (\sigma^{ab} \sigma^{cd}) &= -\frac{1}{2} (\eta^{ac} \eta^{bd} - \eta^{ad} \eta^{bc} + i \varepsilon^{abcd}), \\ tr (\bar{\sigma}^{ab} \bar{\sigma}^{cd}) &= -\frac{1}{2} (\eta^{ac} \eta^{bd} - \eta^{ad} \eta^{bc} - i \varepsilon^{abcd}), \\ [\sigma^{ab}, \sigma^{cd}] &= \eta^{ac} \sigma^{bd} - \eta^{ad} \sigma^{bc} - \eta^{bc} \sigma^{ad} + \eta^{bd} \sigma^{ac}, \\ \{\sigma^{ab}, \sigma^{cd}\}_{\alpha}{}^{\beta} &= tr (\sigma^{ab} \sigma^{cd}) \delta_{\alpha}^{\beta}, \\ (\varepsilon \sigma^{ab})^{\alpha\beta} (\sigma_{ab} \varepsilon)_{\gamma\delta} &= -\delta_{\gamma}^{\alpha} \delta_{\delta}^{\beta} - \delta_{\delta}^{\alpha} \delta_{\gamma}^{\beta}, \end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} -\frac{i}{4!} \varepsilon_{abcd} (\sigma^a \bar{\sigma}^b \sigma^c \bar{\sigma}^d)_{\alpha}{}^{\beta} &= \delta_{\alpha}^{\beta}, \\ \frac{i}{4!} \varepsilon_{abcd} (\bar{\sigma}^a \sigma^b \bar{\sigma}^c \sigma^d)_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\alpha}} &= \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}. \end{aligned}$$

A.3 Notation spinorielle pour les vecteurs

Des tenseurs $T_{\alpha\beta}$, $\bar{T}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ ont la décomposition suivante :

$$T_{\alpha\beta} = +\epsilon_{\alpha\beta}T + \underbrace{T_{\alpha\beta}}, \quad (\text{A.33})$$

$$\bar{T}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{T} + \underbrace{\bar{T}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}}, \quad (\text{A.34})$$

avec

$$T = \frac{1}{2}T^\alpha_\alpha, \quad \bar{T} = \frac{1}{2}\bar{T}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\alpha}}, \quad (\text{A.35})$$

et

$$\underbrace{T_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}), \quad (\text{A.36})$$

$$\underbrace{\bar{T}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}} = \frac{1}{2}(\bar{T}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \bar{T}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}). \quad (\text{A.37})$$

On peut transformer des indices vectoriels en une paire d'indice pointé, non pointé et inversement, en utilisant les matrices de Pauli :

$$V_m = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_m^{\dot{\alpha}\alpha}V_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (\text{A.38})$$

$$V_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m V_m. \quad (\text{A.39})$$

Alors que le produit scalaire entre deux vecteurs s'écrit :

$$T_a V^a = -\frac{1}{2}T_{\alpha\dot{\alpha}}V^{\alpha\dot{\alpha}}. \quad (\text{A.40})$$

A.4 Spineurs

Dans la base de Weyl (ou représentation chirale), les matrices de Dirac sont données par :

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

D'après les relations (A.19) et (A.20), on a une algèbre de Clifford pour les matrices de Dirac :

$$\{\gamma^m, \gamma^n\} = -2\eta^{mn}$$

Il est plus aisé en général de travailler avec des matrices de Dirac qu'avec celles de Pauli, utilisées dans le formalisme des spineurs de Weyl. Par conséquent, il est plus intéressant de travailler avec des quadri-spineurs qu'avec des bi-spineurs. Deux types de constructions de quadri-spineurs sont possibles à partir de spineurs de Weyl.

- un spineur de Majorana Ψ_M est constitué d'un spineur de Weyl χ_α et de son hermitique conjugué $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_M = (\chi^\alpha, \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}),$$

- un spineur de Dirac Ψ_D est lui, constitué de deux spineurs de Weyl différents ψ_α et $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$:

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_D = (\chi^\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}).$$

On a utilisé la définition suivante pour la conjugaison complexe des bispineurs :

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0.$$

Il est aussi utile de connaître certaines formules ; soient :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix},$$

deux spineurs de Dirac, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}\Phi &= \bar{\psi}\bar{\eta} + \chi\varphi &= (\bar{\Phi}\Psi)^\dagger \\ \bar{\Psi}\gamma_5\Phi &= \bar{\psi}\bar{\eta} - \chi\varphi &= -(\bar{\Phi}\gamma_5\Psi)^\dagger \\ \bar{\Psi}\gamma^\mu\Phi &= \chi\sigma^\mu\bar{\eta} + \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\varphi &= (\bar{\Phi}\gamma^\mu\Psi)^\dagger \\ \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Phi &= \chi\sigma^\mu\bar{\eta} + \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\varphi &= (\bar{\Phi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi)^\dagger \end{aligned}$$

A.5 Relations utiles

Par définition, on a :

$$D^2 = D^\alpha D_\alpha = -D_\alpha D^\alpha, \quad (A.41)$$

$$\bar{D}^2 = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} = -\bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}}. \quad (A.42)$$

L'algèbre de supersymétrie est donnée par :

$$\{D_\alpha, \bar{D}^{\dot{\alpha}}\} = 2i(\sigma^m \epsilon)_\alpha^{\dot{\alpha}} \partial_m, \quad (A.43)$$

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m, \quad (A.44)$$

$$\{D^\alpha, \bar{D}^{\dot{\alpha}}\} = -2i\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} \partial_m. \quad (A.45)$$

À partir de là, on peut calculer des commutateurs impliquant des produits de dérivées, très utiles pour les calculs de lagrangiens en composantes :

$$[D_\alpha, \bar{D}^2] = -4i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{D}^{\dot{\alpha}}, \quad (A.46)$$

$$[\bar{D}^{\dot{\alpha}}, D^2] = -4i\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} \partial_m D_\alpha, \quad (A.47)$$

$$[\bar{D}^2, D^2] = 8\partial_m (2\partial^m + iD\sigma^m \bar{D}), \quad (A.48)$$

$$[\bar{D}^2, D^2] \bar{D}^2 = 16\Box \bar{D}^2. \quad (A.49)$$

Annexe B

bases du MSSM

Dans ce chapitre, nous nous contentons de donner les parties nécessaires du Lagrangien du MSSM pour nos calculs. On donne aussi quelques éléments sur les spineurs de Majorana, dont un exemple de calcul de section efficace non polarisée.

Sommaire

B.1	Couplage $Z - \chi - \chi$	141
B.2	Couplage h-Z-Z	142
B.3	Couplage $h - \chi - \chi$	142
B.4	Couplage $Z - f - f$	143
B.5	Particule de Majorana	143
B.6	Un exemple de calcul avec des particules de Majorana	144

B.1 Couplage $Z - \chi - \chi$

Le lagrangien d'un tel couplage s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 \bar{\chi}_i \gamma^\mu (C_{ij}^V - C_{ij}^A \gamma_5) \chi_j Z_\mu, \quad (\text{B.1})$$

avec

$$C_{ij}^V = \frac{g}{4 \cos \theta_W} (O_{ij}^Z - O_{ij}^{Z*}), \quad (\text{B.2})$$

$$C_{ij}^A = \frac{g}{2 \cos \theta_W} (O_{ij}^Z + O_{ij}^{Z*}), \quad (\text{B.3})$$

et

$$O_{ij}^Z = (-N_{i3} N_{j3}^* + N_{i4} N_{j4}^*). \quad (\text{B.4})$$

Si on néglige la violation de CP, on peut travailler dans une base telle que : $C_{ij}^V = 0$.

B.2 Couplage h - Z - Z

La partie du lagrangien du MSSM contenant ce couplage est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} C_Z h Z_\mu Z^\mu, \quad (\text{B.5})$$

avec :

$$C_Z = -\frac{gm_Z}{\cos \theta_W} \sin(\alpha - \beta). \quad (\text{B.6})$$

Il est important de noter que l'on va toujours travailler dans la limite de découplage du pseudo scalaire A : $m_A \gg m_Z$, ce qui implique la relation suivante :

$$\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}. \quad (\text{B.7})$$

B.3 Couplage $h - \chi - \chi$

Le couplage $h - \chi - \chi$, est donné par le lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{g}{2} h \bar{\chi}_i (\sin \alpha (L_{ij}^* P_L + L_{ij} P_R) + \cos \alpha (K_{ij}^* P_L + K_{ij} P_R)) \chi_j, \quad (\text{B.8})$$

avec

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{1}{2} (N_{i4} (N_{j2} - \tan \theta_W N_{j1}) + (i \leftrightarrow j)), \\ L_{ij} &= \frac{1}{2} (N_{i3} (N_{j2} - \tan \theta_W N_{j1}) + (i \leftrightarrow j)). \end{aligned}$$

La forme symétrique de K et L vient du caractère Majorana des neutralinos, qui nous permet d'écrire :

$$\bar{\chi}_i (1 \pm \gamma_5) \chi_j = \bar{\chi}_j (1 \pm \gamma_5) \chi_i.$$

Dans le cas spécial où N_{ij} est réel, ce qui est le cas intéressant pour nous, on peut réécrire le lagrangien comme :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 C_{h \ ij} h \bar{\chi}_i \chi_j, \quad (\text{B.9})$$

où :

$$C_{h \ ij} = \frac{g}{2 \cos \theta_W} O_{ij}^h, \quad (\text{B.10})$$

avec

$$O_{ij}^h = ((N_{i2} \cos \theta_W - N_{i1} \sin \theta_W) (\sin \alpha N_{j3} + \cos \alpha N_{j4}) + (i \leftrightarrow j)). \quad (\text{B.11})$$

B.4 Couplage $Z - f - f$

Enfin la dernière partie du lagrangien important pour notre travail est :

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{f} \gamma^\mu \left(C_V^{ffZ} - C_A^{ffZ} \gamma^5 \right) f Z_\mu,$$

avec

$$\begin{aligned} C_V^{ffZ} &= -\frac{g}{2 \cos \theta_W} (T_{3f} - 2 \sin^2 \theta_W Q_f), \\ C_A^{ffZ} &= -\frac{g}{2 \cos \theta_W} T_{3f}, \end{aligned}$$

où Q_f et T_{3f} sont la charge et la troisième composante de l'isospin faible. On travaille avec la convention : $T_{3top} = 1$, et $Q_{top} = \frac{2}{3}$.

B.5 Particule de Majorana

Comme les neutralinos sont neutres, ils sont leurs propres antiparticules. Ce sont donc des particules de Majorana [74]. Ainsi on peut utiliser les règles de Feynman pour des fermions de Dirac, si on fait attention à l'orientation choisie pour les lignes fermioniques.

La condition de Majorana est la suivante :

$$\chi = \chi^c = C \bar{\chi}^T. \quad (\text{B.12})$$

Le développement en ondes planes de l'opérateur de Majorana sera alors :

$$\chi(t, x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=\pm} \left(a_s(p) u_s(p) e^{-ip \cdot x} + a_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ip \cdot x} \right). \quad (\text{B.13})$$

Appliquant la condition de Majorana (B.12) dans le développement précédent (B.13), nous trouvons les conditions suivantes :

$$u_s = C \gamma^0 v_s^*, \quad (\text{B.14})$$

$$v_s = C \gamma^0 u_s^*. \quad (\text{B.15})$$

Ainsi particules et antiparticules ne sont plus des degrés de liberté indépendants.

Il est aussi utile de connaître les propriétés de telles particules sous l'opération de parité, données par :

$$P \chi(t, x) P^{-1} = \eta_p^* \gamma^0 \chi(t, -x), \quad (\text{B.16})$$

$$P \chi^c(t, x) P^{-1} = \eta_p^* \gamma^0 \chi^c(t, -x). \quad (\text{B.17})$$

Or l'équation (B.17) peut se réécrire :

$$\begin{aligned} P \chi^c(t, x) P^{-1} &= \eta_p^* \gamma^0 C \gamma_0 \chi^*(t, -x), \\ &= -\eta_p^* C \chi^*(t, -x). \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Cependant, la transformation par parité de χ^c découle de celle du champ χ :

$$\begin{aligned} P \chi^c(t, x) P^{-1} &= C P \bar{\chi}^T(t, x) P^{-1}, \\ &= C \gamma^0 P \chi^*(t, x) P^{-1}, \\ &= \eta_p C \chi^*(t, -x). \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Par conséquent, les équations (B.18) et (B.19) nous donnent l'égalité suivante :

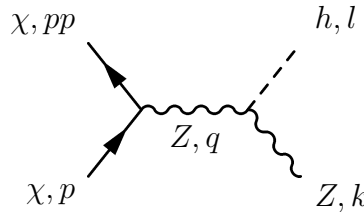
$$\eta_p = -\eta_p^*,$$

il en résulte que

$$\eta_p = \pm i. \quad (\text{B.20})$$

B.6 Un exemple de calcul avec des particules de Majorana

Dans cette appendice, nous donnons un exemple de calcul avec des particules de Majorana.



On exécute le calcul pour une matrice de mélange N réelle et donc avec des masses de neutralinos signées. En particulier, on a : $m_{\chi_3} < 0$ et $C^V = 0$. De plus, on travaille dans la limite de découplage : $\sin(\alpha - \beta) \simeq -1$ (B.5). L'amplitude s'écrit :

$$A = \frac{-iC_A C_Z}{q^2 - m_Z^2} (\bar{\chi}(p') \gamma^\mu \gamma_5 \chi(p)) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2} \right) \varepsilon^\nu(k),$$

avec $\chi = u$ et $\bar{\chi} = \bar{v}$, u et v étant des spineurs de Dirac.

On calcule le module carré de l'amplitude :

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \left| \frac{C_A C_Z}{q^2 - m_Z^2} \right|^2 (\bar{\chi}(p') \gamma^\mu \gamma_5 \chi(p) \bar{\chi}(p) \gamma_5 \gamma^\nu \chi(p')) \left(g_{\mu\rho} - \frac{q_\mu q_\rho}{m_Z^2} \right) \\ &\times \left(g_{\nu\sigma} - \frac{q_\nu q_\sigma}{m_Z^2} \right) \varepsilon^\rho(k) \varepsilon^\sigma(k). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

On s'intéresse ici, à une section efficace non polarisée, donc on peut utiliser les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{spin} u(p) \bar{u}(p) &= \not{p} + m, & \sum_{spin} v(p) \bar{v}(p) &= \not{p} - m, \\ \sum_{polarization} \varepsilon^\mu(q) \varepsilon^{\nu*}(q) &= - \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_Z^2} \right). \end{aligned}$$

Avec les propriétés de la trace, le module carré de l'amplitude (B.21) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin} |A|^2 &= -\frac{1}{4} \left| \frac{C_A C_Z}{q^2 - m_Z^2} \right|^2 \text{tr} [(\not{p}' - m_\chi) \gamma^\mu \gamma_5 (\not{p} + m_\chi) \gamma^\nu \gamma_5] \\ &\times \left(g_{\mu\rho} - \frac{q_\mu q_\rho}{m_Z^2} \right) \left(g_{\nu\sigma} - \frac{q_\nu q_\sigma}{m_Z^2} \right) \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_Z^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Après un peu d'algèbre de Dirac, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin} |A|^2 &= \left| \frac{C_A C_Z}{q^2 - m_Z^2} \right|^2 \left((p'p - m_\chi^2) g^{\mu\nu} - p'^\mu p^\nu - p'^\nu p^\mu \right) \\ &\times \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{m_Z^2} (k_\mu k_\nu + 2q_\mu q_\nu) + \frac{1}{m_Z^4} (q_\mu q_\nu q^2 + (q_\mu k_\nu + q_\nu q_\mu) qk) - q_\mu q_\nu \frac{qk^2}{m_Z^6} \right), \end{aligned} \quad (B.23)$$

sachant que $q^2 = s$ et $k^2 = m_Z^2$. On trouve alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin} |A|^2 &= \frac{1}{m_Z^6} \left| \frac{C_A C_Z}{s - m_Z^2} \right|^2 \left\{ (-3m_Z^6 + 2s m_Z^4 - (s^2 + 2qk^2) m_Z^2 + s qk^2) m_\chi^2 \right. \\ &+ 2(m_Z^4 pk - m_Z^2 pq qk) p'k + \left(m_Z^2 (m_Z^2 - s)^2 + (2m_Z^2 - s) qk^2 \right) pp' \\ &+ \left. 2(2m_Z^4 pq - (s pq + pk qk) m_Z^2 + pq qk^2) p'q \right\}. \end{aligned}$$

À présent, on a besoin de spécifier la cinématique. On travaillera dans le référentiel du centre de masse :

$$pq = \frac{s}{2}, \quad (B.24)$$

$$pp' = \frac{s}{2} - m_\chi^2, \quad (B.25)$$

$$pk = \frac{s + m_Z^2 - m_h^2}{4} - \sqrt{\left(\frac{s}{4} - m_\chi^2\right) \left(\frac{s + m_Z^2 - m_h^2}{2\sqrt{s}} - m_Z^2\right)} \cos \theta, \quad (B.26)$$

$$p'k = \frac{s + m_Z^2 - m_h^2}{4} + \sqrt{\left(\frac{s}{4} - m_\chi^2\right) \left(\frac{s + m_Z^2 - m_h^2}{2\sqrt{s}} - m_Z^2\right)} \cos \theta. \quad (B.27)$$

Ainsi, après intégration sur l'angle θ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin} |A|^2 &= \frac{1}{6m_Z^6 s} \left| \frac{C_A C_Z}{s - m_Z^2} \right|^2 \left\{ m_\chi^2 (6s^4 - 12(m_h^2 + 2m_Z^2) s^3 + (32m_Z^4 + 12m_Z^2 m_h^2 + 6m_h^4) s^2 \right. \\ &- (64m_Z^4 - 20m_Z^2 m_h^2 + 12m_h^4) m_Z^2 s + 2(m_h^2 - m_Z^2)^2 m_Z^4) \\ &+ \left. m_Z^4 (s^3 + (10m_Z^2 - 2m_h^2) s^2 + (m_h^2 - m_Z^2)^2 s) \right\} \end{aligned}$$

Il nous est donc possible de calculer la section efficace :

$$\sigma(\chi\chi \rightarrow Zh) = \frac{1}{128\pi \sqrt{s(s - 4m_\chi^2)}} \sqrt{1 - \frac{(m_h + m_Z)^2}{s}} \sqrt{1 - \frac{(m_h - m_Z)^2}{s}} \sum_{spin} |A|^2.$$

Nous sommes intéressés par l'annihilation de neutralinos au repos, ce qui nous permet de réaliser le développement suivant : $s \simeq 4m_\chi^2 \left(1 + \frac{v^2}{4}\right)$. Donc la section efficace devient :

$$v\sigma(\chi\chi \rightarrow Zh)_Z = \frac{g^4 O_{11}^Z{}^2 \beta_{Zh}}{256\pi m_\chi^2 m_Z^4 c_W^4} \left(m_Z^4 - 2(4m_\chi^2 + m_h^2) m_Z^2 + (m_h^2 - 4m_\chi^2)^2 \right) \quad (B.28)$$

avec :

$$\beta_{Zh} = \sqrt{1 - \frac{(m_h + m_Z)^2}{4m_\chi^2}} \sqrt{1 - \frac{(m_h - m_Z)^2}{4m_\chi^2}}. \quad (\text{B.29})$$

Si on avait choisi de travailler avec une matrice de mélange imaginaire et des masses de neutralinos définies positives, on aurait eu le même résultat. La seule différence aurait été le remplacement de χ par $\gamma_5 \chi$ dans les calculs, afin de changer le signe du terme de masse par rapport à celui de l'impulsion.

Bibliographie

- [1] J.-L. Kneur A. Djouadi and G. Moultaka. Suspect : A fortran code for the supersymmetric and higgs particle spectrum in the mssm. 2002.
- [2] E. Aslanides et al. A deep sea telescope for high energy neutrinos. 1999.
- [3] Antonio Aurilia, H. Nicolai, and P. K. Townsend. Hidden constants : The theta parameter of qcd and the cosmological constant of n=8 supergravity. *Nucl. Phys.*, B176 :509, 1980.
- [4] P. Binétruy, M. K. Gaillard, and T. R. Taylor. Dynamical supersymmetry breaking and the linear multiplet. *Nucl. Phys.*, B455 :97–108, 1995.
- [5] P. Binétruy, F. Pilon, G. Girardi, and R. Grimm. The 3-form multiplet in supergravity. *Nucl. Phys.*, B477 :175–199, 1996.
- [6] Daniele Binosi. Electroweak pinch technique to all orders. *J. Phys.*, G30 :1021–1064, 2004.
- [7] M. Brhlik and L. Roszkowski. Wimp velocity impact on direct dark matter searches. *Phys. Lett.*, B464 :303–310, 1999.
- [8] C. P. Burgess, J. P. Derendinger, F. Quevedo, and M. Quiros. Gaugino condensates and chiral-linear duality : An effective Lagrangian analysis. *Phys. Lett.*, B348 :428–442, 1995.
- [9] P. Gondolo C. Savage and K. Freese. Can wimp spin dependent couplings explain dama data, in light of null results from other experiments ? *Phys. Rev.*, D70 :123513, 2004.
- [10] H.-Y. Chiu. *Phys. Rev. Lett*, 17 :712, 1966.
- [11] S. Coleman and J. Mandula. All possible symmetries of the s matrix. *Phys. Rev.*, 159 :1251–1256, 1967.
- [12] C. J. Copi and L. M. Krauss. Comparing wimp interaction rate detectors with annual modulation detectors. *Phys. Rev.*, D67 :103507, 2003.
- [13] R. Coquereaux. *Espaces fibrés et connexions*.
- [14] J. M. Cornwall. Dynamical mass generation in continuum qcd. *Phys. Rev.*, D26 :1453, 1982.
- [15] J. M. Cornwall and J. Papavassiliou. Gauge invariant three gluon vertex in qcd. *Phys. Rev.*, D40 :3474, 1989.
- [16] S. Coutu et al. Positron measurements with the heat-pbar instrument. Prepared for 27th International Cosmic Ray Conference (ICRC 2001), Hamburg, Germany, 7-15 Aug 2001.
- [17] B. de Wit and J. W. van Holten. Multiplets of linearized $SO(2)$ supergravity. *Nucl. Phys.*, B155 :530–542, 1979.

- [18] J.-P. Derendinger. Lecture notes on globally supersymmetric theories in four- dimensions and two-dimensions. Prepared for 3rd Hellenic School on Elementary Particle Physics, Corfu, Greece, 13-23 Sep 1989.
- [19] M. Drees and M. M. Nojiri. The neutralino relic density in minimal $n=1$ supergravity. *Phys. Rev.*, D47 :376–408, 1993.
- [20] F. Englert and R. Brout. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13 :321–322, 1964.
- [21] D. Abrams et al. Exclusion limits on the wimp nucleon cross-section from the cryogenic dark matter search. *Phys. Rev.*, D66 :122003, 2002.
- [22] D. S. Akerib et al. New results from the cryogenic dark matter search experiment. *Phys. Rev.*, D68 :082002, 2003.
- [23] G. Angloher et al. Dark matter search with cressst cryogenic detectors. *Phys. Atom. Nucl.*, 66 :494–496, 2003.
- [24] J. Jochum et al. Limits on wimp dark matter using sapphire cryogenic detectors. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 124 :189–192, 2003.
- [25] P. Belli et al. Quest for electron decay $e^- \rightarrow$ neutrino e gamma with a liquid xenon scintillator. *Phys. Rev.*, D61 :117301, 2000.
- [26] P. Gondolo et al. Darksusy : Computing supersymmetric dark matter properties numerically. *JCAP*, 0407 :008, 2004.
- [27] R. Bernabei et al. New limits on wimp search with large-mass low-radioactivity nai(tl) set-up at gran sasso. *Phys. Lett.*, B389 :757–766, 1996.
- [28] R. Bernabei et al. Searching for wimps by the annual modulation signature. *Phys. Lett.*, B424 :195–201, 1998.
- [29] R. Bernabei et al. On a further search for a yearly modulation of the rate in particle dark matter direct search. *Phys. Lett.*, B450 :448–455, 1999.
- [30] R. Bernabei et al. Search for wimp annual modulation signature : Results from dama / nai-3 and dama / nai-4 and the global combined analysis. *Phys. Lett.*, B480 :23–31, 2000.
- [31] R. Bernabei et al. Investigating the dama annual modulation data in a mixed coupling framework. *Phys. Lett.*, B509 :197–203, 2001.
- [32] R. Bernabei et al. Dark matter search. *Riv. Nuovo Cim.*, 26N1 :1–73, 2003.
- [33] R. Bernabei et al. Dark matter particles in the galactic halo : Results and implications from dama/nai. *Int. J. Mod. Phys.*, D13 :2127–2160, 2004.
- [34] V. Sanglard et al. Final results of the edelweiss-i dark matter search with cryogenic heat-and-ionization ge detectors. *Phys. Rev.*, D71 :122002, 2005.
- [35] P. Fayet. Introduction to supersymmetric theories of particles and interactions. Invited talks at the Hellenic School on Elementary Particle Physics, Corfu, Greece, 2-20 Sep 1992 and at INFN Eloisatron Project : 23rd Workshop : The Decay Properties of SUSY Particles, Erice, Italy, 28 Sep - 4 Oct 1992.
- [36] P. Fayet. Higgs model and supersymmetry. *Nuovo Cim.*, A31 :626, 1976.
- [37] P. Fayet and J. Iliopoulos. Spontaneously broken supergauge symmetries and goldstone spinors. *Phys. Lett.*, B51 :461–464, 1974.
- [38] S. Ferrara, C.A. Savoy, and B. Zumino. General massive multiplets in extended supersymmetry. *Phys. Lett.*, 100B :393–398, 1981.

- [39] S. Ferrara and P. van Nieuwenhuizen. The auxiliary fields of supergravity. *Phys. Lett.*, 74B :333, 1978.
- [40] S. Ferrara and P. van Nieuwenhuizen. Consistent supergravity with complex spin-3/2 gauge fields. *Phys. Rev. Lett.*, 47 :1699–1671, 1976.
- [41] S. Ferrara and B. Zumino. Supergauge invariant Yang-Mills theories. *Nucl. Phys.*, B79 :413, 1974.
- [42] S. Ferrara, B. Zumino, and J. Wess. Supergauge multiplets and superfields. *Phys. Lett.*, 51B :239–241, 1974.
- [43] R. Foot. Implications of the dama and cressst experiments for mirror matter-type dark matter. *Phys. Rev.*, D69 :036001, 2004.
- [44] R. Foot. Reconciling the positive dama annual modulation signal with the negative results of the cdms ii experiment. *Mod. Phys. Lett.*, A19 :1841–1846, 2004.
- [45] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev. Minimal set of auxiliary fields and S-matrix for extended supergravity. *Lett. Nuovo Cimento*, 25 :79–87, 1979.
- [46] D.Z. Freedman. Irreducible representations of supersymmetry. In M. Lévy and S. Deser, editors, *Recent developments in gravitation - Cargèse 1978*, pages 549–561. NATO Advanced Study Institute Series B44, Plenum Press, 1979.
- [47] D. Hooper G. Bertone and J. Silk. Particle dark matter : Evidence, candidates and constraints. *Phys. Rept.*, 405 :279–390, 2005.
- [48] M. Kamionkowski G. Jungman and K. Griest. Supersymmetric dark matter. *Phys. Rept.*, 267 :195–373, 1996.
- [49] M. Kamionkowski G. Prézeau, A. Kurylov and P. Vogel. New contribution to wimp-nucleus scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :231301, 2003.
- [50] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Roček, and W. Siegel. *Superspace*. Frontiers in Physics 58. The Benjamin/Cummings Publishing Company ;Inc., Advanced Book Program, Reading, Massachusetts, 1983.
- [51] S. J. Gates, Jr. Super p-form gauge superfields. *Nucl. Phys.*, B184 :381–390, 1981.
- [52] S. J. Gates, Jr. and R. Grimm. The spin (3/2, 1) multiplet and superspace geometry. *Z. Phys.*, C26 :621–625, 1985.
- [53] S. J. Gates, Jr. and V. A. Kostelecký. Supersymmetric matter gravitino multiplets. *Nucl. Phys.*, B248 :570–588, 1984.
- [54] S. J. Gates, Jr. and W. Siegel. (3/2, 1) superfield of O(2) supergravity. *Nucl. Phys.*, B164 :484, 1980.
- [55] L. Girardello and M. T. Grisaru. Soft breaking of supersymmetry. *Nucl. Phys. B194*, pages 65–76, 1982.
- [56] Y. A. Gol’fand and E. P. Likhtman. Extension of the algebra of Poincaré group generators and violation of P invariance. *JETP. Lett.*, 13 :323–326, 1971.
- [57] P. Gondolo and G. Gelmini. Compatibility of dama dark matter detection with other searches. *Phys. Rev.*, D71 :123520, 2005.
- [58] A. M. Green. The wimp annual modulation signal and non-standard halo models. *Phys. Rev.*, D63 :043005, 2001.
- [59] A. M. Green. Effect of realistic astrophysical inputs on the phase and shape of the wimp annual modulation signal. *Phys. Rev.*, D68 :023004, 2003.

- [60] A. M. Green. Erratum : Effect of realistic astrophysical inputs on the phase and shape of the wimp annual modulation signal [phys. rev. d 68, 023004 (2003)]. *Phys. Rev.*, D69 :109902, 2004.
- [61] Anne M. Green. Effect of halo modelling on wimp exclusion limits. *Phys. Rev.*, D66 :083003, 2002.
- [62] K. Griest and M. Kamionkowski. Unitarity limits on the mass and radius of dark matter particles. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :615, 1990.
- [63] Marcus T. Grisaru, W. Siegel, and M. Rocek. Improved methods for supergraphs. *Nucl. Phys.*, B159 :429, 1979.
- [64] J. F. Gunion and H. E. Haber. Two-body decays of neutralinos and charginos. *Phys. Rev.*, D37 :2515, 1988.
- [65] R. Haag, J. Łopuszanski, and M. Sohnius. All possible generators of supersymmetries of the S-matrix. *Nucl. Phys.*, B88 :257–274, 1975.
- [66] P. W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13 :508–509, 1964.
- [67] P. Salati J. Lavalle, J. Pochon and R. Taillet. Clumpiness of dark matter and positron annihilation signal : Computing the odds of the galactic lottery. 2006.
- [68] D. N. Levin J. M. Cornwall and G. Tiktopoulos. Derivation of gauge invariance from high-energy unitarity bounds on the s - matrix. *Phys. Rev.*, D10 :1145, 1974.
- [69] A. Kurylov and M. Kamionkowski. Generalized analysis of weakly-interacting massive particle searches. *Phys. Rev.*, D69 :063503, 2004.
- [70] U. Lindström and M. Roček. Scalar tensor duality and N=1,2 non-linear σ -models. *Nucl. Phys.*, B222 :285–308, 1983.
- [71] A. A. Aboshousha M. M. El Kheishen and A. A. Shafik. Analytic formulas for the neutralino masses and the neutralino mixing matrix. *Phys. Rev.*, D45 :4345–4348, 1992.
- [72] S. P. Martin. A supersymmetry primer. 1997.
- [73] A. Messiah. *Mécanique quantique VOL. 2*.
- [74] R. N. Mohapatra and P. B. Pal. Massive neutrinos in physics and astrophysics. second edition. *World Sci. Lect. Notes Phys.*, 60 :1–397, 1998.
- [75] E. Nezri. *Neutrino et Cosmologie dans les modèles de Grande Unification*. Thèse, Université Blaise Pascal, 2002.
- [76] V. I. Ogievetski and I. V. Polubarinov. The notoph and its possible interactions. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 4 :156–161, 1967.
- [77] V. I. Ogievetsky and E. Sokatchev. On gauge spinor superfield. *JETP Lett.*, 23 :58–61, 1976.
- [78] L. O’Raifeartaigh. Spontaneous symmetry breaking for chiral scalar superfields. *Nucl. Phys.*, B96 :331, 1975.
- [79] N. Fornengo P. Belli, R. Cerulli and S. Scopel. Effect of the galactic halo modeling on the dama/nai annual modulation result : An extended analysis of the data for wimps with a purely spin-independent coupling. *Phys. Rev.*, D66 :043503, 2002.
- [80] G. Girardi P. Binetruy and R. Grimm. Supergravity couplings : A geometric formulation. *Phys. Rept.*, 343 :255–462, 2001.

- [81] M. Kamionkowski P. Ullio and P. Vogel. Spin dependent wimps in dama? *JHEP*, 07 :044, 2001.
- [82] J. Rosiek. Complete set of feynman rules for the minimal supersymmetric extension of the standard model. *Phys. Rev.*, D41 :3464, 1990.
- [83] A. Salam and J. Strathdee. Supergauge transformations. *Nucl. Phys.*, B76 :477–482, 1974.
- [84] A. Salam and J. Strathdee. Supersymmetry and nonabelian gauges. *Phys. Lett.*, 51B :353–355, 1974.
- [85] A. Salam and J. Strathdee. Unitary representations of supergauge symmetries. *Nucl. Phys.*, B80 :499–505, 1974.
- [86] W. Siegel. Gauge spinor superfield as scalar multiplet. *Phys. Lett.*, 85B :333–334, 1979.
- [87] D. Smith and N. Weiner. Inelastic dark matter. *Phys. Rev.*, D64 :043502, 2001.
- [88] K. S. Stelle and P. C. West. Minimal auxiliary fields for supergravity. *Phys. Lett.*, 74B :330, 1978.
- [89] L. Roszkowski T. Nihei and R. Ruiz de Austri. Exact cross sections for the neutralino wimp pair- annihilation. *JHEP*, 03 :031, 2002.
- [90] Max Tegmark and Matias Zaldarriaga. New cmb constraints on the cosmic matter budget : trouble for nucleosynthesis? *Phys. Rev. Lett.*, 85 :2240, 2000.
- [91] L. Verde. Cosmological implications of the first year wilkinson microwave anisotropy probe results. *Int. J. Mod. Phys.*, A19 :1121–1131, 2004.
- [92] D. V. Volkov and V. P. Akulov. Is the neutrino a Goldstone particle? *Phys. Lett.*, 46B :109–110, 1973.
- [93] S. Weinberg. *The Quantum Theory Of Fields : Volume I : Foundations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. 2nd edition 1996.
- [94] J. Wess and J. Bagger. *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, Princeton, 1983. 2nd edition 1992.
- [95] J. Wess and B. Zumino. A Lagrangian model invariant under supergauge transformations. *Phys. Lett.*, 49B :52–54, 1974.
- [96] J. Wess and B. Zumino. Supergauge invariant extension of quantum electrodynamics. *Nucl. Phys.*, B78 :1, 1974.
- [97] J. Wess and B. Zumino. Supergauge transformations in four dimensions. *Nucl. Phys.*, B70 :39, 1974.
- [98] E. P. Wigner. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group. *Ann. Math.*, 40 :149–204, 1939.
- [99] L. B. Okun Ya. B. Zel’dovich and S. B. Pikelner. *Usp. Fiz. Nauk.*, 84 :113, 1965.
- [100] Ya. B. Zel’dovich. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 48 :986, 1965.

Origine et Manifestation de la Brisure de Supersymétrie

- Phénoménologie de l'annihilation de neutralinos en Zh et WW
- Représentation $(0,1/2)$ et Dualité

Résumé La supersymétrie est une extension possible du modèle standard. Il faut en maîtriser autant les aspects formels que la phénoménologie caractéristique pour espérer découvrir si c'est une symétrie choisie par la nature.

La supersymétrie offre un candidat privilégié pour la matière noire : le neutralino le plus léger χ , un des enjeux actuels est de comprendre au mieux les spectres d'annihilation de neutralinos produisant des particules détectables. Ainsi, le canal Zh est important de par la nature dure de son spectre. Cependant, la section efficace d'annihilation de neutralinos dans ce canal est supprimée quand la supersymétrie est brisée. L'annulation de ce canal est alors à chercher dans des phénomènes connus pour le MS : indépendance de jauge et unitarité UV de la théorie. En outre, la suppression est liée au caractère Majorana des neutralinos, mais aussi à la limite d'annihilation au repos, qui confère une polarisation au boson Z . Le même phénomène de polarisation est mis en évidence pour l'annihilation en WW . Néanmoins, la polarisation des W ne supprime pas le canal mais modifie la forme des spectres de ses produits de désintégration qui pourraient être détectés.

D'un point de vue plus formel, les différentes représentations sur le super-espace du multiplet $(0,1/2)$ sont passées en revue. Nous nous concentrons sur deux représentations spécifiques, le multiplet de 3-forme et le multiplet X . Le premier nous permet de réaliser un mécanisme de brisure de supersymétrie de type O'Raifeartaigh, sans singlet dans le superpotentiel. Le second multiplet contient les propriétés d'une brisure de supersymétrie. Nous mettons en évidence une relation de dualité entre ces deux représentations.

Mots-Clefs : Modèle Standard, supersymétrie, matière noire, MSSM, neutralino, super-espace, superchamp, théorie de jauge.

Abstract Supersymmetry is an interesting extension of the Standard Model. Hence, its formal and phenomenological aspects need to be understood before establishing it is realized in Nature.

Supersymmetry offers a natural darkmatter candidate. To check this hypothesis, a crucial point would be the Indirect Detection of neutralino annihilation products. Among annihilation channels, the one with a Z boson and a Higgs scalar, is of interest because of the hard spectrum it yields. However, the spectra needs to be weighted by branching ratios. The Zh channel is then known to be suppressed. We notice that the deeper broken the supersymmetry, the stronger the suppression. Thus the channel suppression has to be understood in terms of gauge independence of different diagrams involved, and high energy unitarity. A key element of the suppression for this channel is the Z boson polarization, which comes from the initial Majorana particles at rest. Finally, we investigate the role of polarization in the WW channel. Here, polarization does not suppress the channel but modifies the shape of the decay products spectra. This could be important from an experimental point of view.

On a more formal side, we point out different kinds of representations of the $(0,1/2)$ multiplet in superspace. First we concentrate on a new kind of superfield called X . We next present a duality in four dimensions, before showing its extension to superspace. Without supersymmetry, this duality links a 3-form to a constant. In superspace, we find that the duality links a 3-form superfield to the new X superfield. It is essential to understand that some components of the 3-form and the X superfield seem to help supersymmetry breaking. Finally we try to transmit this breaking to usual chiral superfields.

Keywords : Standard Model, Supersymmetry, Dark Matter, MSSM, neutralino, super-space, superfield, gauge theory.